به نام خدا

اندازه‌گیری و کمیت‌های فیزیکی: Measurement and Physical Quantities

اهمیت اندازه‌گیری بر کسی پوشیده نیست و یکی از پرکاربردترین مباحث در طول زندگی به حساب می‌آید.

کمیت: به تمامی پدیده‌های قابل اندازه‌گیری موجود در طبیعت کمیت گفته می‌شود.

تعریف یکا: معیار و مقیاس و مبنایی است که اندازه‌گیری هر کمیت بر اساس آن صورت می‌گیرد.

شرایط انتخاب یکا را بنویسید:

الف) دسترسی پذیر باشد.

ب) دقت کافی داشته باشد.

ج) تغییر ناپذیر و ثابت باشد.

اندازه‌گیری چیست؟ مقایسه هر کمیت با یکای آن تا مشخص شود که آن کمیت چند برابر یکاست را، اندازه‌گیری می‌گویم.

کمیت‌ها در فیزیک به دو دسته تقسیم می‌شوند: { ۱- اصلی ۲- فرعی

کمیت‌های اصلی را تعریف کنید؟ آن دسته از کمیت‌هایی که مستقل می‌باشند و برای آنها یکا تعریف شده است را کمیت اصلی می‌گویند و به یکای آن یکای اصلی می‌گویند. مانند طول

سیستم CGS (centimetre - Gram - second) (سانتیمتر - گرم - ثانیه) یکی از دستگاه‌های اندازه‌گیری است. یکاهای مکانیکی در این سیستم یکسان هستند ولی برای یکاهای الکتریکی واحدهای

مختلفی پیشنهاد شده است. بعد سیستم MKS (متر - کیلوگرم - ثانیه) تا حدود زیادی جایگزین این سیستم شد که خود نیز با سیستم SI جایگزین گردید.

سازمان بین المللی اوزان و مقیاس که متشکل از دانشمندان از سراسر جهان می باشد برای کمیت های استانداردی را معرفی می کند که به مجموعهٔ یکاهای انتخابی این سازمان دستگاه بین المللی یکاها یا SI گفته می شود.
International system of Units
Le Systeme International d'unites
کلمه فرانسوی

جدول کمیات و یکای اصلی

کمیت	علامت	یکا در SI	یکاهای جانبی
طول	X , h , L	m	mm , cm
جرم	M , m	kg	G
زمان	t	s	min , h
شدت جریان الکتریکی	I	A آمپر	
دما	T	K کلوین	°C , °F
مقدار ماده	n	Mol	
شدت روشنایی	It	شمع cd کاندلا	لومن Lm , lux یا لوکس

کمیت های فرعی: کمیت هایی که وابسته به کمیت اصلی می باشند و یکای آنها براساس یکای کمیت اصلی و یک رابطه فیزیکی یا ریاضی بدست می آید را کمیات فرعی و یکای آنها یکای فرعی است.

سؤال: چند کمیت فرعی را مثال زده و یکای آنها را بدست آورید؟

الف) سرعت: با توجه به رابطه $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ یکای سرعت را سرعت متحرکی تعریف می کنیم که در حرکت یکنواخت روی خط راست، در هر ثانیه یک متر جابجا شود و آن را متر بر ثانیه می نامیم.

$v = \frac{m}{s}$

ب) شتاب : تغییرات سرعت در واحد زمان است. $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$a = \frac{\text{تغییرات سرعت}}{\text{زمان}} = \frac{\frac{m}{s}}{s} \Rightarrow \frac{m}{s^2}$$

ج) نیرو : حاصلضرب جرم در شتاب است. $F = ma$

$F = \text{جرم} \times \text{شتاب} = kg \frac{m}{s^2} = N$ نیوتن $\qquad 1N = 1\, m.kg/s^2$

د) چگالی : با توجه به رابطه $\rho = \frac{M}{V}$ و اینکه یکای جرم kg و یکای فرعی حجم که متر مکعب است پس یکای چگالی کیلوگرم بر متر مکعب است.

پیشوندهای SI : در بیان بعضی مقادیر فیزیکی با اعدادی بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک برخورد میکنیم
در این زمان پیشوندهایی پشت یکا نوشته می‌شود تا هم خواندن و هم نوشتن ساده شود.
مانند شعاع کره زمین یا بازه زمانی میان دو رویداد هسته‌ای

مثبت

پیشوند	نماد	ضریب
دکا	da (D)	10^{1}
هکتو	h (H)	10^{2}
کیلو	k	10^{3}
مگا	M	10^{6}
گیگا (جیگا)	G	10^{9}
ترا	T	10^{12}
پتا	P	10^{15}
اگزا	E	10^{18}
زتا	Z	10^{21}
یوتا	Y	10^{24}

منفی

پیشوند	نماد	ضریب
دسی	d	10^{-1}
سانتی	c	10^{-2}
میلی	m	10^{-3}
میکرو	μ	10^{-6}
نانو	n	10^{-9}
پیکو	p	10^{-12}
فمتو	f	10^{-15}
آتو	a	10^{-18}
زپتو	z	10^{-21}
یوکتو	y	10^{-24}

$1\,cm = \frac{1}{100}\,m \to \frac{1}{10^{2}} \to 10^{-2}\,m$

مثال: ۵ متر چند سانتی متر است؟

$5\,m = ?\,cm \Rightarrow 5\,m = x\,cm \Rightarrow 5 = x\,10^{-2} \Rightarrow x = 5\times 10^{2}\,cm$

سؤال: ۳۰۰۰ میکرومتر چند سانتی متر است؟

$3000\,\mu m \times \frac{10^{-6}\,M}{1\,\mu m} \times \frac{1\,cm}{10^{-2}\,M} = 3\times10^{3}\times10^{-6}\times10^{2}\,cm \to 3\times10^{-1} = 0/3\,cm$

$3000\,\mu m = ?\,cm \Rightarrow 3000\,\mu m = x\,cm \Rightarrow 3000\times10^{-6} = x\,10^{-2} \Rightarrow x = 3\times10^{3}\times10^{-6}\times10^{2} = 3\times10^{-1} = 0/3\,cm$

مثال: اگر بخواهیم کیلومتر بر ساعت را به متر بر ثانیه تبدیل کنیم ($\frac{km}{h} \to \frac{m}{s}$) ابتدا باید بدانیم هر کیلومتر چند متر و هر ساعت چند ثانیه است سپس با یک تناسب به جواب برسیم

$1\,km = 1000\,m$

$1\,h = 3600\,s \Longrightarrow 1\,\frac{km}{h} \equiv \frac{1000\,m}{3600\,s} = \frac{10}{36}\,\frac{m}{s}$

حال برعکس برای تبدیل متر بر ثانیه به کیلومتر بر ساعت ($\frac{m}{s} \to \frac{km}{h}$) باید

$1\,m = \frac{1}{1000}\,km$

$1\,s = \frac{1}{3600}\,h \Longrightarrow 1\,\frac{m}{s} \equiv \frac{\frac{1}{1000}\,km}{\frac{1}{3600}\,h} = \frac{36}{10}\,\frac{km}{h}$

دستگاه انگلیسی:

Inch (in)	(پا) foot (ft)	yard (yd)	mile (mi) خشکی
0/0254 m	0/3048 m	0/9144 m	1609/344 m
2/54 cm	30/5 cm	91/44 cm	1/6 km
	12 Inch	3 foot	

مایل دریایی (nmi) $= 1852\,m$

Natural units یکاهای طبیعی کمیت‌ها بر حسب انرژی در دستگاه یکاهای آن است

$1\,eV = 1/6\times10^{-19}\,J$

$h=1 \quad c=1$

در ذرات بنیادی برای انرژی‌های بالا

سؤال: ۱۰۰ نانومتر چند کیلومتر است؟

$$100\,nm = ?\,km$$

$$100\,\cancel{nm} = x\,k\cancel{m} \Rightarrow 100\,n = x\,k$$

$$100\times10^{-9} = x\times10^{3}$$

$$x = 100\times10^{-9}\times10^{-3} = 100\times10^{-12} = 10^{-10}$$

سؤال: ۲۰۰ گیگاگرم چند مگاگرم است؟

$$200\,Gg = ?\,Mg$$

$$200\,G\cancel{g} = x\,M\cancel{g} \Rightarrow 200\,G = x\,M$$

$$200\times10^{9} = x\,10^{6}$$

$$x = 200\times10^{9}\times10^{-6} = 200\times10^{3} = 2\times10^{5}$$

$$14\times10^{-3}\,cm = ?\,mm$$

$$14\times10^{-3}\times10^{-2}\,\cancel{m} = x\times10^{-3}\,\cancel{m}$$

$$x = 14\times10^{-5}\times10^{3} = 14\times10^{-2}$$

$$30\,\frac{m}{s} = ?\,\frac{km}{h}$$

$$72\,\frac{km}{h} = ?\,\frac{m}{s}$$

به نام خدا

Vectors

بردارها :

دو نوع کمیت داریم : { نرده‌ای ، عددی یا اسکالر / برداری }

scalar
vector

کمیت‌های نرده‌ای: کمیت‌هایی که تنها با داشتن مقدار و بزرگی آنها می‌توان آنها را مشخص کرد.

مانند: جرم ، زمان ، دما ، چگالی ، انرژی ، فشار

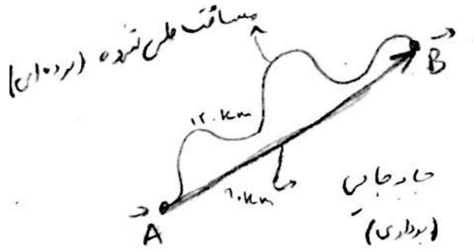
کمیت‌های برداری: کمیت‌هایی که علاوه بر مقدار و بزرگی دارای جهت می‌باشند و از قاعده جمع برداری پیروی می‌کنند را کمیات برداری گویند.

مانند: جابه‌جایی ، سرعت ، شتاب ، نیرو

تعریف بردار: بردار یک پاره خط جهت دار است و به صورت $\longrightarrow$ نشان داده می‌شود.

جابه‌جایی: پاره خط مستقیم و جهت داری که ابتدای مسیر حرکت را به انتهای مسیر حرکت وصل می‌کند

برای نمایش بزرگی یک بردار از علامت $|\vec{a}|$ استفاده می‌شود.



جمع بردارها :

خواص جمع بردارها :

۱ خاصیت جابه‌جایی

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

۲ خاصیت شرکت پذیری

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{b}+\vec{a})+\vec{c}$$

بردارهای هم‌سنگ: دو برداری را که هم اندازه، هم راستا و هم جهت باشند را بردارهای هم‌سنگ می‌گویند

بردار برآیند: برداری است که برابر با حاصل جمع برداری دو یا چند بردار باشد.

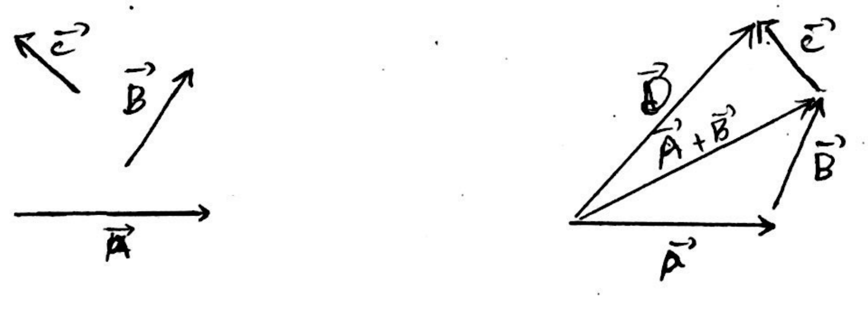
سؤال: چگونه می‌توان دو یا چند بردار را با هم جمع کرد؟

برای رسم بردار برآیند تک‌تک بردارها را در امتداد راستا یا انتهای یکدیگر با توجه به جهت و اندازه‌شان رسم می‌کنیم و آنگاه برداری بردار برآیند است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کند.

قاعده جمع برداری

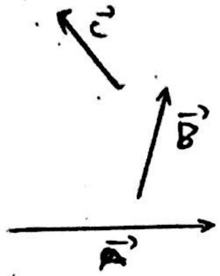
۱- روش مثلثی:

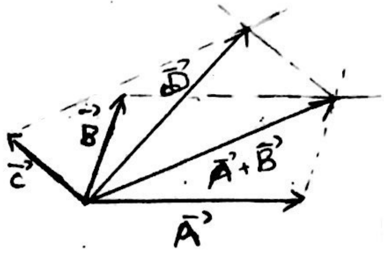
در این روش از انتهای بردار $\vec{a}$ بردار $\vec{b}$ را رسم کرده و سپس ابتدای اولی را به انتهای آخری وصل می‌کنیم.



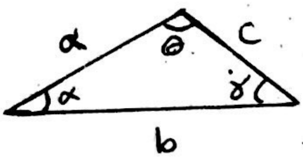
$$\vec{D}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

۲- روش متوازی الاضلاع





اندازه برآیند دو بردار :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$$

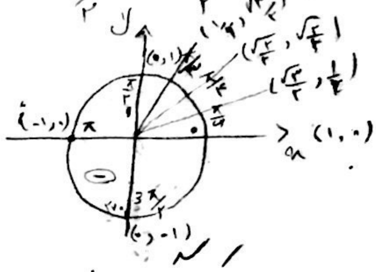
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$\frac{a}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\theta} = \frac{c}{\sin\alpha}$$

رابطه sin و cos در مثلث

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
۰	۳۰°	۴۵°	۶۰	۹۰°	۱۸۰°
sin ۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰
cos ۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱



زاویه‌های

$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ متمم → ۳۰+۶۰=۹۰ → sin ۳۰ = cos ۶۰

$\alpha + \theta = \pi$ مکمل → ۱۵۰°+۳۰°=۱۸۰° ، sin ۱۵۰° = sin ۳۰°

۱) اگر دو بردار با یکدیگر هر زاویه دلخواهی بسازد.

در این صورت بزرگی بردار برآیند از قاعده کسینوسها و روش مثلثی بدست می‌آید.

* مکمل متمم ۹۰° [illegible] سوال

۱۵۰°

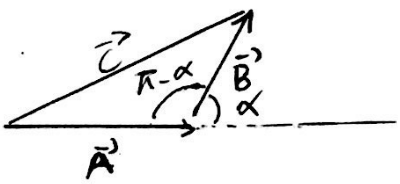
cos / tan / cot ۱۵۰° = - cos / tan / cot ۳۰°

مثال ۱۳۵° → sin = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱۳۵°+۴۵°)=۱۸۰° cos = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

tan = -1

cot = -1



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha)$$

$\pi = 180°$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

tan ۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	∞	۰
cot ∞	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	∞

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

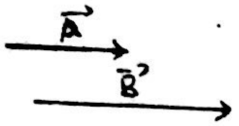
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

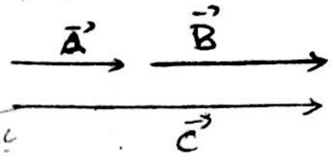
$$\tan = \frac{1}{\cot}$$

۲) اگر دو بردار هم جهت باشند.

بزرگی بردار برآیند آنها برابر با مجموع جبری بزرگی تک تک بردارها است.

موازی هم جهت





با آوردن ریاضی چند جمله‌ای ها

اتحاد اول

$\alpha = 0 \longrightarrow \cos 0 = 1$

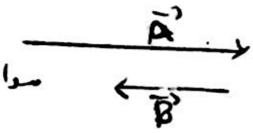
$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow c^2 = (a+b)^2$ $\quad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

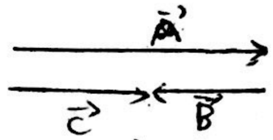
$c = a + b$

۳) اگر دو بردار خلاف جهت یکدیگر باشند.

بزرگی بردار برآیند برابر است با قدر مطلق اختلاف بزرگی دو بردار

موازی خلاف جهت





$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

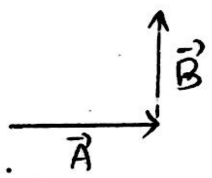
$\alpha = 180 \longrightarrow \cos 180 = -1$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow c^2 = (a-b)^2$ $\quad$ اتحاد دوم $\quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$c = |a-b|$

۴) اگر دو بردار بر یکدیگر عمود باشند.

بزرگی بردار برآیند از قضیه فیثاغورث بدست می‌آید.



$\overset{\alpha}{\theta} = 90 \longrightarrow \cos 90 = 0$

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$

۵) اگر $a = b$

$c^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cos\alpha = 2a^2 (1 + \cos\alpha)$

$c^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

$c = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$

روابط ریاضی

$$\begin{cases} 1 + \cos\alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ 1 - \cos\alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

مثال / دو بردار با اندازه های ۱۰ و ۲۰ واحد با یکدیگر زاویه های الف) ۶۰° ب) ۹۰° ج) ۱۲۰° د) ۱۸۰° می سازند
اندازه برآیند آن دو بردار را در هر حالت حساب کنید؟

* زاویه بین ۰ تا ۱۸۰ قابل قبول است مثلاً اگر گفتند ۲۱۰° باید ۲۱۰-۳۶۰ کنیم که می شود ۱۵۰°

الف) $a = 10$, $b = 20$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

$$c^2 = 100 + 400 + 400\cos(60) = 700 \Rightarrow c = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}$$

ب) $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{500} = \cancel{5\sqrt{10}}$ $10\sqrt{5}$

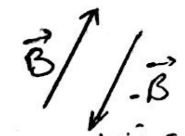
ج) $\theta = 120^\circ \Rightarrow c^2 = 500 + 2(10)(20)(-\frac{1}{2}) = 300 \Rightarrow c = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$

د) $c = |a-b| = |20-10| = 10$

تفاضل دو بردار:

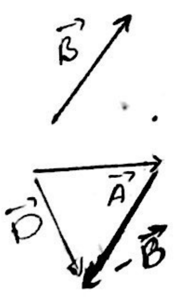
تفریق دو بردار حالت خاصی از جمع دو بردار است.

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$
$= \vec{A} + (-\vec{B})$

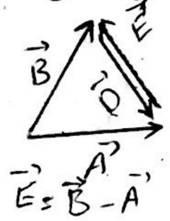


روش رسم: ابتدا دو بردار را از یک مبدا رسم می کنیم در این صورت تفاضل دو بردار $(A-B)$ برداری است که انتهای B را به انتهای A وصل می کند.

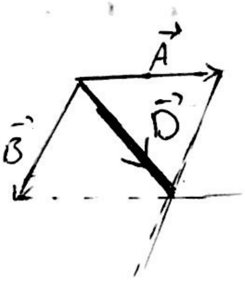
روش مثلثی



$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$



$\vec{E} = \vec{B} - \vec{A}$



روش متوازی الاضلاع

جمع بردارها جابه جا پذیر است
$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

اما تفاضل بردارها جابه جا پذیر نیست
$\vec{A} - \vec{B} = -(\vec{B} - \vec{A})$

$$d^2 = a^2 + b^2 + (2)(a)(-b)\cos\alpha$$

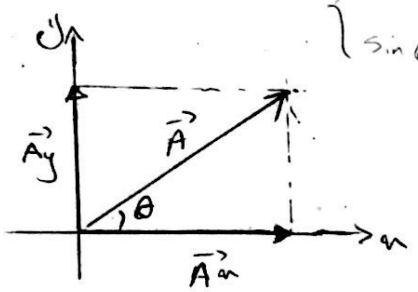
$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$$

تجزیه بردارها :

گاهی لازم داریم دو یا چند بردار به جای یک بردار صورت پیدا می‌کند این کار را تجزیه بردار می‌نامند.

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \dfrac{A_x}{A} \\ \sin\theta = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \dfrac{A_y}{A} \end{cases}$$



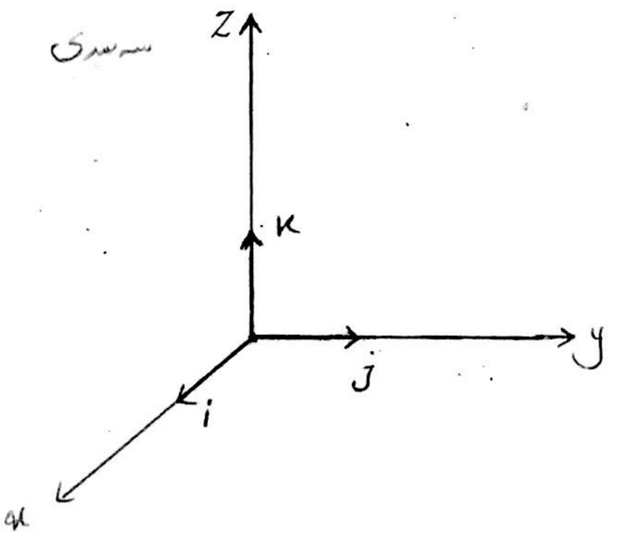
$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases}$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

بردارهای یکه :

برای ساده کردن عملیات مربوط به بردارها معمولاً از سه بردار یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ که به ترتیب با محورهای X و Y و Z موازی اند استفاده می‌کنیم. بردار یکه کمیت بدون بعدی است که فقط برای مشخص کردن جهت در فضا به کار می‌رود.



$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

به طور کلی هر بردار را می توان به صورت حاصل جمع سه بردار که هر یک موازی یکی از محورهای مختصات است بیان کرد.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

و اندازه آن به صورت $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ بدست می آید.

نکته: اگر دو بردار با هم برابر باشند مؤلفه های نظیر به نظیر آنها با هم برابرند.

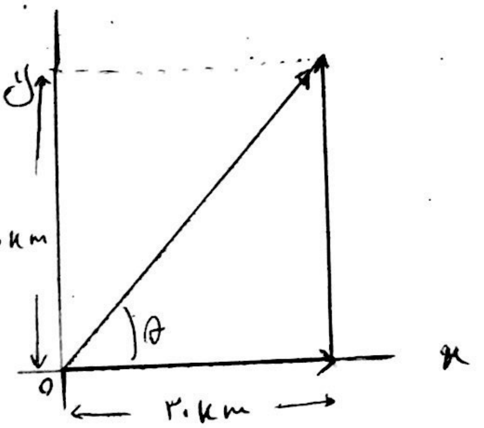
$$\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

بنابراین

$$\Rightarrow A_x = B_x \quad , \quad A_y = B_y \quad , \quad A_z = B_z$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

مثال / اتومبیلی روی یک جاده افقی مسافت ۳۰ km را به سمت شرق می پیماید. سپس در یک تقاطع به سمت شمال می پیچد و تا قبل از توقف مسافت ۴۰ km را طی می کند. جابجایی برآیند اتومبیل را پیدا کنید؟



$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$= \sqrt{(۳۰\,km)^2 + (۴۰\,km)^2}$$

$$= ۵۰\,km$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{۴۰\,km}{۳۰\,km} = ۱/۳۳ \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(۱/۳۳) = ۵۳^\circ$$

بنابراین بردار برآیند جابجایی ۵۰ km است و با محور شرق در سمت شمال زاویه ۵۳° می سازد.

مثال / سه بردار هم صفحه نسبت به یک دستگاه مختصات قائم به صورت زیر تعریف می شوند:

$a = 4i - j$ و $b = -3i + 2j$ و $c = -3j$

که در آن i و j بردارهای یکه در راستای محورهای x و y هستند. بردار برآیند این بردارها را پیدا کنید؟

$r_x = a_x + b_x + c_x = 4 - 3 + 0 = 1$

$r_y = a_y + b_y + c_y = -1 + 2 - 3 = -2$

در نتیجه $r = i\,r_x + j\,r_y = i - 2j$

بزرگی $r = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

مثال / چهار بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ به صورت زیر تعریف شده اند، در این صورت بزرگی و حاصل برداری عبارت های خواسته شده را بدست آورید؟

$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{c} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$

$\vec{d} = -6\vec{i} + 7\vec{j}$

الف) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

ب) $\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d})$

ج) $\vec{g} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$

الف) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\hat{i} - 5\vec{j} - 6\vec{i} + 7\vec{j}$

$\vec{e} = 2\vec{i} + 7\vec{j} \Rightarrow$ بزرگی $\vec{e} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$

ب) $\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d}) = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} + 2\vec{j}) - (4\vec{i} - 5\vec{j} - 6\vec{i} + 7\vec{j})$

$\vec{f} = (4\vec{i} + 5\vec{j}) - (-2\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow$ بزرگی $\vec{f} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$

ج) $\vec{g} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{i} - 7\vec{j}$

$\vec{g} = 2\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow$ بزرگی $\vec{g} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

ضرب بردارها:

۱- ضرب یک عدد در یک بردار

۲- ضرب نرده ای (داخلی، نقطه ای، اسکالر) دو بردار

۳- ضرب برداری (خارجی) دو بردار

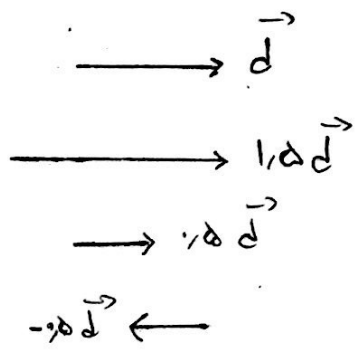
ضرب یک عدد در یک بردار:

اگر $\vec{a}$ یک کمیت برداری و n یک عدد باشد حاصلضرب $n\vec{a}$ برداری است با مشخصات زیر که آن را $\vec{p}$ می نامیم.

الف) راستای بردار $\vec{p}$ همان راستای بردار $\vec{a}$ است.

ب) اندازه بردار $\vec{p}$، n برابر بردار $\vec{a}$ است.

پ) اگر n مثبت باشد سوی بردار $\vec{p}$ و بردار $\vec{a}$ یکی است یعنی $\vec{p}$ و $\vec{a}$ هم جهت هستند و اگر n منفی باشد سوی بردار $\vec{p}$ درخلاف سوی بردار $\vec{a}$ است.



مثال/ قانون دوم نیوتن $\vec{F}=m\vec{a}$

چون جرم جسم کمیت نرده ای همواره مثبت است. پس همواره سوی نیروی وارد بر جسم همان سوی شتاب است.

ضرب نرده‌ای دو بردار:

نوعی ضرب بین دو بردار است که نتیجه آن یک نرده‌ای است و به صورت زیر است،

$C = \vec{A} \cdot \vec{B}$

$C = ab\cos\theta$

$$\begin{cases} \theta = 0° \longleftrightarrow C_{max} = ab \\ \theta = 90° \longleftrightarrow C = 0 \\ \theta = 180° \longleftrightarrow C_{min} = -ab \end{cases}$$

مثال: کار $\Rightarrow W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$

در ضرب نرده‌ای 1) $\vec{A} \cdot \vec{B} = ab\cos\theta$

2) اگر $\vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{B} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

آنگاه $\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$

$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \Rightarrow$ یک عددی باشد

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases}$$

ضرب نرده‌ای بردارهای یکه $\vec{i} \cdot \vec{i} = |i| \times |i| \cos 0 = 1 \times 1 \times 1 =$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = |i| \times |j| \cos 90 = 1 \times 1 \times 0 = 0$

خواص ضرب نرده‌ای:

1) جابه‌جایی پذیری $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

2) توزیع پذیری $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

نکته : زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{ab}$$

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

مثال / با استفاده از ضرب نرده ای بردار ها نشان دهید :

الف) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

ب) زاویه بین دو بردار از رابطه روبرو بدست می آید : $\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$

که $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ و $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$

الف) $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$a_x b_x(\vec{i}\cdot\vec{i}) + a_x b_y(\vec{i}\cdot\vec{j}) + a_x b_z(\vec{i}\cdot\vec{k}) +$$

$$a_y b_x(\vec{j}\cdot\vec{i}) + a_y b_y(\vec{j}\cdot\vec{j}) + a_y b_z(\vec{j}\cdot\vec{k}) +$$

$$a_z b_x(\vec{k}\cdot\vec{i}) + a_z b_y(\vec{k}\cdot\vec{j}) + a_z b_z(\vec{k}\cdot\vec{k})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ب) $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$ (1)

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ ②

①,② $\Rightarrow ab\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$

مثال / دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت زیر مفروضند ، زاویه بین دو بردار را پیدا کنید ؟

$\vec{A} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ $\qquad a = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$\vec{B} = -2\vec{j} + 4\vec{k}$ $\qquad b = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$$\cos\theta = \frac{-2(0) + 3(-2) + (1)(4)}{2\sqrt{14}\sqrt{5}} = \frac{-6+4}{2\sqrt{70}} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{70}}}$$

در ناحیه دوم قرار دارد .

مثال / دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت زیر مفروض اند . نسبت $\frac{\alpha}{\beta}$ چقدر باشد تا دو بردار کوپلیلنر متعامد باشند ؟

$\vec{A} = \alpha\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{B} = \vec{i} + \beta\vec{j}$ $\qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

$$\alpha - 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 2\beta \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\beta} = 2}$$

مثال / زاویه بین دو بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ را بدست آورید ؟

$a = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{27}$ $\qquad , b = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$$\cos\theta = \frac{(3\times2) + (3\times1) + (-3\times3)}{\sqrt{27}\times\sqrt{14}} = \frac{0}{\sqrt{27}\times\sqrt{14}} = 0 \qquad \begin{cases}\cos\theta = 0 \\ \cos 90^\circ = 0\end{cases} \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

دو بردار برهم عمودند .

ضرب برداری یا خارجی دو بردار :

نوعی ضرب بین دو بردار است که نتیجه آن یک بردار است و آن را به صورت زیر نشان می دهیم

$\vec{A} \underset{}{\overset{\text{cross}}{\times}} \vec{B}$

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$C = ab \cdot \sin\theta$

در ضرب نرده ای $C = \vec{A} \cdot \vec{B}$ بود

$$\begin{cases} \theta = 0^\circ \Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = 0 \\ \theta = 90^\circ \Rightarrow |\vec{C}| = |\vec{A}\times\vec{B}| = ab \\ \theta = 180^\circ \Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = 0 \end{cases}$$

مثال: $\vec{F} = |q|\vec{v}\vec{B}\sin\theta$

که تندی بار الکتریکی

که شدت میدان مغناطیسی

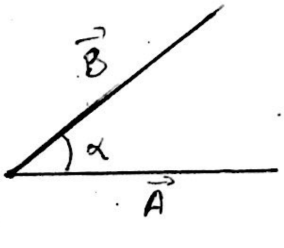
بردار حاصلضرب برداری بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است.

برای تعیین جهت بردار $\vec{C}$ طبق دستور زیر عمل می کنیم.

طبق تعریف بردار $\vec{C}$ هم بر $\vec{A}$ عمود است و هم بر $\vec{B}$ یعنی بر صفحه ای که $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در آن قرار دارند عمود است. برای تعیین سوی $\vec{C}$ از قاعده ی دست راست استفاده می کنیم. به این صورت که اگر چهار انگشت دست راست را در جهت بردار اول باشد، طوری که در جهت زاویه کمتری به بردار دوم بپیچیم آنگاه انگشت شصت سوی بردار $\vec{C}$ را نشان می دهد.

$\vec{A} \times \vec{B}$ ⊙ ← بردار برون سو

$\vec{B} \times \vec{A}$ ⊗ ← بردار درون سو



$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{C}| = AB\sin\theta$$
$$|\vec{B}\times\vec{A}| = BA\sin\theta$$
$$\Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{B}\times\vec{A}|$$

نکته:
$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

خواص ضرب برداری:

۱) $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$ جابجایی پذیر نیست

۲) $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$

۳) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \cancel{\vec{B}+\vec{C}}\ \overset{A\times C}{}$ توزیع پذیری

۴) اگر $\vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{B} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = a_x b_y\vec{k} - a_x b_z\vec{j} - a_y b_x\vec{k} + a_y b_z\vec{i} + a_z b_x\vec{j} - a_z b_y\vec{i}$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

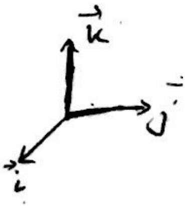
ضرب برداری را به وسیله دترمینان خطی را می‌توان انجام داد و همان نتیجه را گرفت.

ضرب برداری بردارهای یکه:

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$ $\quad \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$ $\quad \vec{i}\times\vec{i} = 0$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$ $\quad \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$ $\quad \vec{j}\times\vec{j} = 0$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$ $\quad \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$ $\quad \vec{k}\times\vec{k} = 0$



$|\vec{i}\times\vec{i}| = |\vec{i}||\vec{i}|\sin 0 = 1\times1\times0 = 0$

$|\vec{k}\times\vec{i}| = |\vec{k}||\vec{i}|\sin 90 = 1\times1\times1 \Rightarrow \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

در جهت ساعتگرد باشد با علامت مثبت و در جهت پادساعتگرد با علامت منفی است.

مثال/ دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت زیر مفروض اند حاصلضرب $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ را بیابید؟

$\vec{A}=\vec{i}-\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$

$\vec{B}=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$

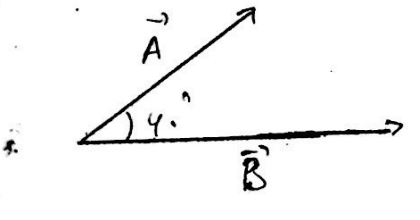
$$\vec{C}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1-2)i \cancel{-}(1-1)j+(4+2)k$$

$$\vec{C}=-3\vec{i}+6\vec{k}$$

این صفحه بر محور y عمود است بردار در صفحه xoz قرار دارد.

مثال/ دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ داریم؛ طوری که اندازه بردار $\vec{A}=5$ و اندازه بردار $\vec{B}=10$ و زاویه بین آنها 60° است. مطلوبست تعیین الف) $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ب) $|\vec{A}\times\vec{B}|$

ج) جهت $\vec{A}\times\vec{B}$.



الف) $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = 5\times10\times\cos 60^\circ = 5\times10\times\frac{1}{2}=25$

ب) $\vec{A}\times\vec{B} = A\times B\sin\theta = 5\times10\times \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\, 60 = 5\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}$

ج) $\vec{A}\times\vec{B}$ $\otimes$ بردار درون‌سو است

مثال/ اگر حاصلضرب نرده‌ای دو بردار با اندازه حاصلضرب خارجی آن‌ها برابر باشد آنگاه زاویه بین دو بردار را تعیین کنید؟

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}\times\vec{B}|$$

$$AB\cos\theta = AB\sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \sin\theta \Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}$$

مثال/ سه بردار $a = 3i + 3j \cancel{+2k} - 2k$ ، $b = -i - 4j + 2k$ و $c = 2i + 2j + k$ را در نظر بگیرید. الف) $a\cdot(b\times c)$ ب) $a\cdot(b+c)$ ج) $a\times(b+c)$ را حساب کنید؟

الف)

$$a\cdot(b\times c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -21$$

$$= (-8)3 - (-5)3 + 6(-2) = -24 + 15 - 12 = -21$$

ب)

$$a\cdot(b+c) = 3(-1+2) + 3(-4+2) - 2(2+1) = 9$$

ج)

$$a\times(b+c) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & -2 \\ -1+2 & -4+2 & 2+1 \end{vmatrix} = 5i - 11j - 9k$$

مثال/ دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود بر هم‌اند که اندازه $\vec{A} = 6$ و اندازه $\vec{B} = 10$ و زاویه بین آن‌ها 90° است. مطلوبست تعیین:

الف) $\vec{A}\cdot\vec{B}$

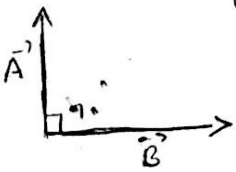
ب) $\vec{B}\cdot\vec{A}$

ج) $|\vec{A}\times\vec{B}|$

د) $|\vec{B}\times\vec{A}|$

ذ) جهت $\vec{A}\times\vec{B}$

ه) جهت $\vec{B}\times\vec{A}$



الف) $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = 6\times10\times\cos 90^\circ = 0$

ب) $\vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\theta = 10\times6\times\cos 90^\circ = 0$

ج) $|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta = 6\times10\times\sin 90^\circ = 60$

د) $|\vec{B}\times\vec{A}| = BA\sin\theta = 10\times6\times\sin 90^\circ = 60$

ذ) $\vec{A}\times\vec{B} = \otimes$ درون سو

ه) $\vec{B}\times\vec{A} = \odot$ برون سو

به نام خدا

Kinematic

سینماتیک: تعریف

سینماتیک چگونگی حرکت اجسام در فضا و زمان است.

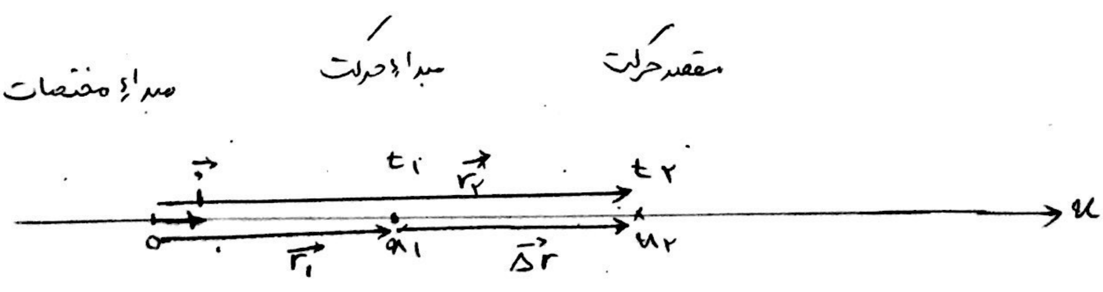
تعریف مسیر حرکت یا مسافت طی شده: تمام نقاطی که متحرک طی زمان حرکت از آنها عبور می‌کند را مسیر حرکت یا مسافت طی شده گویند.

تعریف جابجایی: پاره خط مستقیم و جهت داری است که ابتدای مسیر حرکت را به انتهای مسیر حرکت وصل می‌کند.

نکته: همیشه مقدار جابجایی کوچکتر از مسافت طی شده است و در حالت خاصی که متحرک بر روی خط مستقیم حرکت می‌کند مقدار جابجایی برابر مسافت طی شده است.

نکته: اگر متحرکی از نقطه‌ای شروع به حرکت کند و دوباره پس از طی مسافتی به نقطه اول باز گردد گرچه که مسافت طی شده غیر صفر است ولی اما مقدار جابجایی برابر صفر است زیرا نقطه ابتدا و انتهای حرکت یکی است و فاصله هر نقطه با خودش صفر است.

حرکت یک بعدی یا حرکت روی خط راست:



... (چقدر راه یا کند) ... ؟ اسکالر ← $\frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان}}$ = تندی متوسط (اسکالر، مثبت)

$$\begin{cases} \Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta t = t_2 - t_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = x_1 \vec{i} \\ \vec{r}_2 = x_2 \vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i}$$

$$\vec{\Delta r} = \Delta x \vec{i} \Rightarrow |\vec{\Delta r}| = \Delta x$$

تعریف سرعت متوسط :

۱ـ به نسبت جابه‌جایی بر زمان سپری شده سرعت متوسط می‌گویند.

$$\vec{V} = \vec{\bar{V}} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

۲ـ به نسبت تغییرات مکان بر تغییرات زمان سرعت متوسط می‌گویند.

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

۳ـ به آهنگ جابه‌جایی سرعت متوسط می‌گویند.

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$\bar{V}$: سرعت متوسط بوده و یکای آن (m/s) است.

Δx : تغییر مکان یا جابه‌جایی بوده و یکای آن (m) است.

Δt : علامت تغییرات زمان یا گذر زمان بوده و یکای آن s ثانیه است.

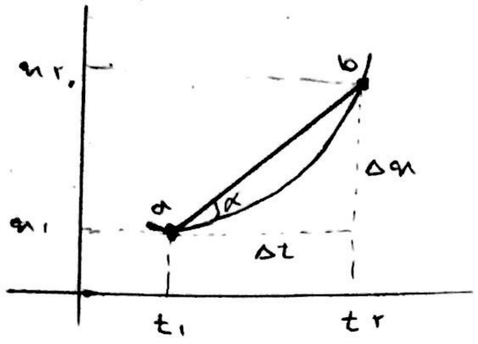
x_1, x_2 : به‌ترتیب مکان اول و مکان دوم بوده و یکای آنها (m) است.

t_1, t_2 : به‌ترتیب زمان اول و دوم بوده و یکای آن (s) است.

در برخی مسائل مکان اولیه را با x_0 نشان می‌دهند و اگر لحظه شروع حرکت صفر باشد لذا رابطه سرعت متوسط را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\bar{V} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow \bar{V} = \frac{x - x_0}{t}$$

نمودار مکان زمان



$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$x = f(t)$$

مثال/ معادله حرکت جسمی در SI با رابطه‌ی $x = 3t^2 - 2$ داده شده است. سرعت متوسط آن را در بازه‌ی زمانی ۱ تا ۴ ثانیه به دست آورید؟

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\bar{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{46 - 1}{4 - 1} = \frac{45}{3} = 15\ m/s$$

مثال/ قطاری به طول ۱۰۰ متر می‌خواهد از طول یک پل به طول ۴۰۰ متر عبور کند. هنگامی که ابتدای قطار از اول پل شروع به حرکت می‌کند در سرانجام انتهای قطار از پل می‌گذرد زمانی معادل ۱۰ ثانیه طول می‌کشد. سرعت متوسط قطار را بدست آورید؟

$x_0 = 0$

$x = 400 + 100 = 500\ m \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{x - x_0}{t} = \frac{500}{10}$

$t = 10\ s$

$$\bar{v} = 50\ m/s$$

سرعت لحظه‌ای: برابر است با سرعت متحرک در هر لحظه یا شیب نمودار مکان-زمان در هر لحظه که همان حد سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی بسیار کوچک می‌باشد.

$$v = \tan\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt}$$

حرکت شتابدار :

در واقع شتاب هنگامی ظاهر می‌شود که سرعت متغیر تغییر کند. مثلاً اگر متحرکی با سرعت ثابتی حرکت کند شتاب آن صفر خواهد بود.

شتاب به معنی آهنگ تغییر سرعت است.

شتاب متوسط :

تغییرات سرعت به زمان سپری شده را شتاب متوسط گویند.

فرض کنیم متحرکی در لحظه‌ی t_1 دارای سرعت لحظه‌ای $V(t_1)$ (V_1) باشد و در لحظه t_2 دارای سرعت لحظه‌ای $V(t_2)$ (V_2) باشد در این صورت شتاب متوسط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{a}_{\text{شتاب متوسط}} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} \quad \left(m/s^2,\ \frac{m/s}{s}\right)$$

مثال/ سرعت ذره‌ای $14 m/s$ در جهت $+x$ است. $2/4s$ بعد سرعت آن $20 m/s$ در جهت مخالف است. شتاب متوسط ذره در این بازه ۲/۴ ثانیه‌ای چقدر است؟

$$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{-20 - 14}{2/4} = \frac{-24}{2/4} = -10 m/s^2$$

نکته: منفی بودن علامت شتاب الزاماً به معنی کاهش سرعت نیست. به طور کلی اگر $\vec{V}$ و a هم علامت باشند حرکت تند شونده و در غیر این صورت کند شونده است.

مثال/ بردار مکان متحرکی به صورت روبه‌رو است:

$$\vec{r} = -3t\,\vec{i} + 4t^2\,\vec{j}$$

مطلوب است شتاب متوسط بین ثانیه‌ی اول و سوم.

Force and Newton's laws

نیرو و قوانین نیوتن :

قانون اول نیوتن (قانون اینرسی یا لختی) :

هرگاه برآیند نیروهای وارد بر جسمی صفر باشد (و یا نیرویی به جسم وارد نشود) اگر جسم در حال سکون باشد در همان حالت باقی می ماند و اگر در حال حرکت باشد به حرکت مستقیم الخط یکنواخت خود ادامه می دهد (و یا به عبارت دیگر اجسام تمایل به حفظ حالت اولیه دارند.)

قانون دوم نیوتن :

اگر برآیند نیروهای وارد بر جسم غیر صفر باشد آنگاه جسم مورد نظر دارای شتاب خواهد بود که این شتاب هم راستا و هم جهت با برآیند نیروهاست و اندازه آن با اندازه برآیند نیروها متناسب است و با جرم جسم رابطه عکس دارد.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

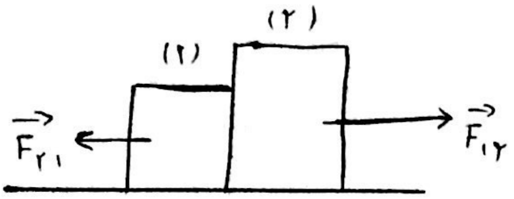
$$\vec{a} = \left(\frac{1}{m}\right)\vec{F}$$

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow \boxed{F = m\,a} \rightarrow N/kg \text{ یا } m/s^2$$

(N) $\quad$ kg

قانون سوم نیوتن (قانون عمل و عکس العمل) :

هر عملی را عکس العملی است خلاف جهت و هم اندازه با آن که اگر جسم اول بر جسم دوم نیرویی وارد کند جسم دوم هم نیرویی هم اندازه و بر خلاف جهت بر جسم اول وارد می کند.



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$|F_{21}| = |F_{12}|$$

حرکت موشک به سمت بالا را براساس قوانین نیوتن توجیه کنید؟

گاز سوخت درون موشک به دلیل آنکه موشک به آنها نیرویی به سمت پایین وارد می کند خارج می شود آنگاه این گاز ها نیرویی هم اندازه و برخلاف جهت به سمت بالا بر موشک وارد می کند (قانون سوم نیوتن) اکنون که موشک نیرویی به سمت بالا وارد شده بر طبق قانون دوم نیوتن شتابی به سمت بالا پیدا کرده و به سمت بالا حرکت می کند.

مثال/ به جسمی به جرم 4kg دو نیرو به صورت زیر وارد می شود. الف) بردار شتاب این متحرک را بدست آورید ب) راستای حرکت این متحرک را نیز مشخص کنید. (راستای شتاب را مشخص کنید.)

$\vec{F}_1 = 4\vec{i} + 12\vec{j}$

$F_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j}$

$F = 6\vec{i} + 8\vec{j}$

$F = ma$

$6i + 8j = 4(a)$

$\frac{6}{4} i + \frac{8}{4} j = a$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{i} + 2\vec{j}}$$

ب) $\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$ $\quad \theta_a = 53^\circ$

مثال/ معادله حرکت متحرکی در SI به صورت $x = t^3 + 5t - 10$ می باشد. نیروی وارده بر این متحرک به جرم 2kg را به صورت تابعی از زمان بدست آورید و همچنین نیروی وارد بر متحرک را در لحظه $t = 3\,sec$ محاسبه کنید؟

$$v = 3t^2 + 5$$

$$a = 6t$$

$$F = ma$$

$$= m\frac{d^2x}{dt^2}$$

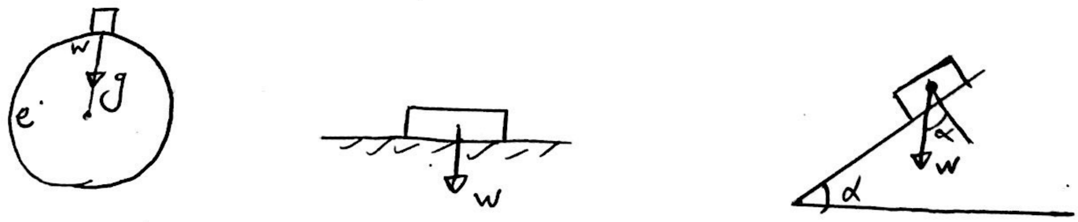
$$= m(6t)$$

$$\boxed{F = 2(6)t = 12t} \qquad t = 3\,sec \Rightarrow F = 12(3) = 36\,N$$

تعریف نیروی وزن:

$$W_g = mg$$

نیروی وزن همیشه برافق عمود است.



جرم: مقدار ماده ای که در جسم وجود دارد را جرم جسم می گویند.

فرق جرم و وزن:

! جرم همیشه ثابت است ولی وزن متغیر است.

۲_ جرم کمیت نرده‌ای است و وزن یک کمیت برداری است.

۳_ جرم را با ترازو، وزن را با نیروسنج اندازه‌گیری می‌کنیم.

اینرسی:

مخالفت جسم در مقابل جسم و تغییر حالتی که در آن ایجاد می‌شود را همان اینرسی گویند.

سؤال/ چرا هنگامی که اتومبیل از حالت سکون در می‌آید سرنشینان آن به سمت عقب پرت می‌شوند؟ در ابتدا سرنشینان درون اتومبیل ساکن هستند و هنگامی که اتومبیل به حرکت در می‌آید نیرویی که یکباره بر سرنشینان وارد می‌کند لذا به دلیل اینرسی، سرنشینان با این تغییر حالت مخالفت کرده و طبق قانون اول نیوتن تمایل دارند حالت سکون خود را حفظ کنند.

لذا سرجای خود باقی مانده و به صندلی اتومبیل که به جلو می‌رود برخورد می‌کند. لذا به نظر می‌رسد که به عقب پرت می‌شود.

مثال/ بر جسمی به جرم ۵kg که بر یک سطح افقی بدون اصطکاک است نیرویی به اندازه ۲۰ N در جهت افقی وارد می‌شود در این صورت شتابی که این جسم پیدا می‌کند را بدست آورید؟

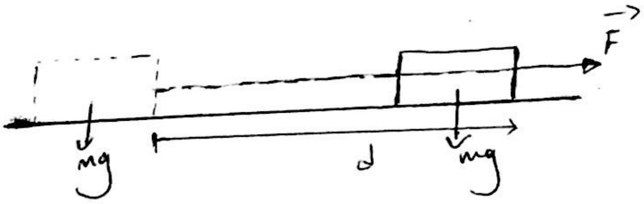
$$F = ma$$

$$۲۰ = ۵a \Rightarrow a = \frac{۲۰}{۵} = ۴\ m/s^۲$$

کار و انرژی ۶

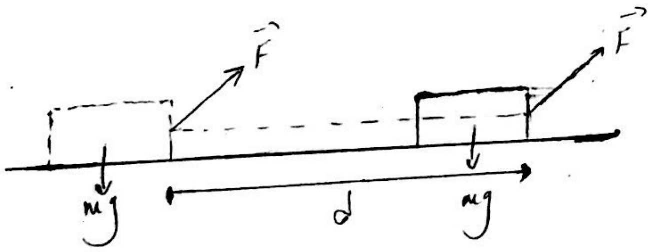
Work and Energy

کار: هرگاه به جسمی نیرو وارد شود و آن جسم در راستای نیرو جابه جا گردد می گوییم به توسط آن نیرو بر روی جسم کار انجام شده است. و در واقع کار انجام شده بر روی یک جسم یک کمیت نرده ای است که از حاصلضرب داخلی نیرو بر جابه جایی بدست می آید.



جابه جایی در راستای نیرو است $\quad w = Fd$

$\cos 0^\circ = 1$



جابه جایی در جهت نیرو نباشد و با آن زاویه θ بسازد

$w = \vec{F} \cdot \vec{d}$

$w = Fd\cos\theta \longrightarrow$ زاویه بین F و d

کار ← w ، نیرو ← F ، جابه جایی ← d

* واحد کار ژول است $\quad 1j = 1n/m$

نکته:

۱/ $\theta = 0 \Rightarrow w_{max} = Fd$

۲/ $0 < \theta < 90 \Rightarrow w > 0$

۳/ $\theta = 90 \Rightarrow w = 0$ ، اگر نیرو و جابه جایی بر هم عمود باشند کار صفر است

$\theta = 90 \Rightarrow w = Fd\cos 90^\circ = Fd(0) = 0$

۴/ $90 < \theta < 180 \Rightarrow w < 0$

۵/ $\theta = 180 \Rightarrow w_{min} = -Fd$

الف: کار انجام شده به نیرو (F) و جابه‌جایی (d) و زاویه بین آنها (θ) بستگی دارد و مستقل از سرعت و شتاب جسم است.

مثال ۱/ نیرویی وارد بر جسمی به جرم $2kg$ به صورت $\vec{F} = 10\vec{i} - 20\vec{j}$ است در صورت اعمال این نیرو متحرک از نقطهٔ $\vec{r_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ به مکان $\vec{r_2} = 5\vec{i} + 7\vec{j}$ منتقل می‌شود. کار این نیرو را در این جابه‌جایی پیدا کنید؟

$$\vec{d} = \Delta r = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

$$= (5-2)\vec{i} + (7-3)\vec{j} \Rightarrow \vec{d} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 10(3) + (-20)(4) = 30 - 80 = -50\, J$$

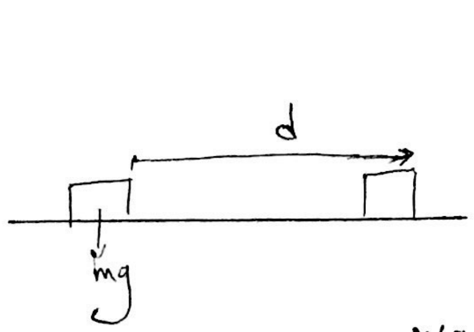
زاویه بین F و d بزرگتر از $90°$ درجه است.

$$W_T = W_1 + W_2 + \ldots$$ کار برآیند

$$\boxed{W_T = F_{\text{برآیند}}\, d}$$ نیروی برآیند در راستای جابه‌جایی

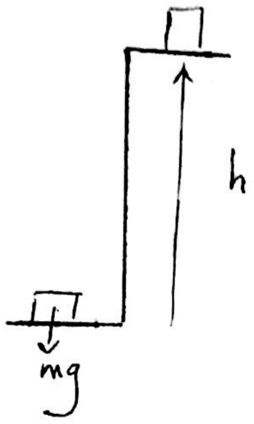
کار نیروی وزن یا کار نیروی ثقل:

۱) در جابه‌جایی افقی



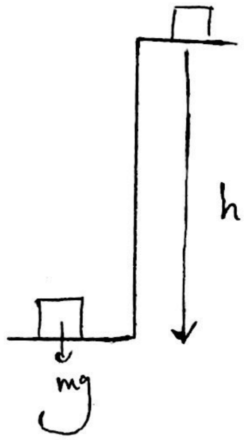
$$W_g = mg\, d \cos 90° = 0$$

۲) در جابه‌جایی عمودی رو به بالا



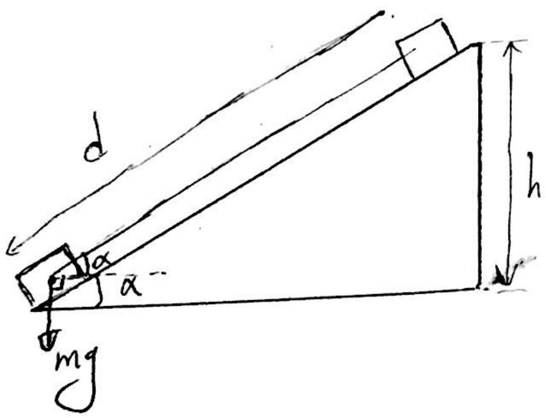
$$W_g = mgh\cos 180^\circ = -mgh$$

۳) در جابه‌جایی عمودی رو به پایین



$$W_g = mgh\cos 0^\circ = mgh$$

۴) در جابه‌جایی روی سطح شیب‌دار



$$W = mgd\cos(90+\alpha)$$

$$W = -mgd\sin\alpha$$

$$W_g = -mgh$$

نکته:
به این نیروها که کارشان در جابه‌جایی بین دو نقطه به مسیر حرکت بستگی ندارد نیروهای کنسرواتیو یا پایستار گویند.

کار نیروی وزن به مسیر بستگی ندارد فقط به اختلاف ارتفاع یا سطح بستگی دارد.

کار نیروی پایستار وارد بر جسم با تغییرات انرژی پتانسیل آن برابر است البته با علامت منفی

$$\begin{cases} W_g = 0 \\ W_g = -mgh \\ W_g = mgh \end{cases}$$

کار $\boxed{W = -\Delta U}$ انرژی پتانسیل

$$\Delta U = -W$$

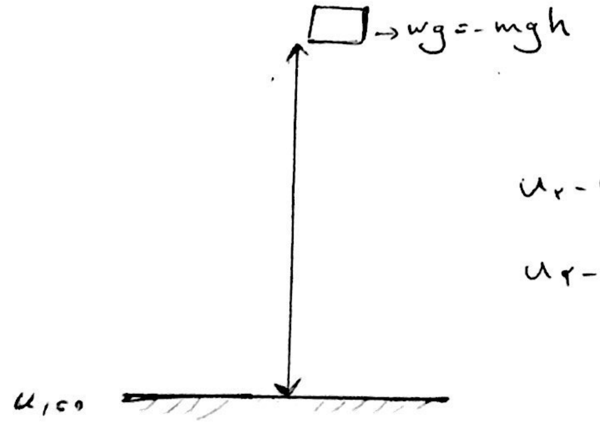
1) $W > 0 \Rightarrow \Delta U < 0$

2) $W < 0 \Rightarrow \Delta U > 0$

نکته: هرگاه کار مثبت باشد انرژی پتانسیل جسم کاهش می‌یابد و انرژی جنبشی آن افزایش می‌یابد و این عمل خود به خود انجام می‌شود و نیازی به عامل خارجی ندارد.

ولی اگر کار نیروی پایستار منفی باشد انرژی پتانسیل دستگاه افزایش و انرژی جنبشی آن کم می‌شود و این عمل خود به خود صورت نمی‌گیرد و عامل خارجی باید این عمل را انجام دهد.

انرژی پتانسیل گرانش:



مبدا انرژی پتانسیل گرانش سطح زمین است.

$$U_2 - U_1 = -W_g$$

$$U_2 - 0 = -(-mgh) \Rightarrow U_2 = \boxed{U = mgh}$$

انرژی پتانسیل گرانش

انرژی جنبشی

انرژی جنبشی ← $K = \frac{1}{2} m v^2$ → سرعت

جرم ↑ (m)

اگر سرعت ثابت باشد انرژی جنبشی با جرم رابطه مستقیم دارد.

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{(mv)^2}{2m}$$

تکانه یا اندازه حرکت

اگر تکانه تغییر نکند و ثابت باشد

انرژی جنبشی ← $K = \frac{p^2}{2m}$

هم p

انرژی جنبشی با جرم جسم نسبت عکس دارد.

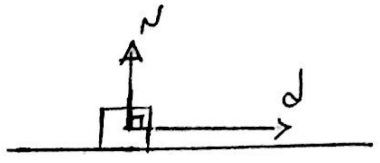
مثال / اتومبیلی به جرم ۲ تن با انرژی جنبشی 4×10^5 ژ در حال حرکت است اندازه حرکت اتومبیل را پیدا کنید؟

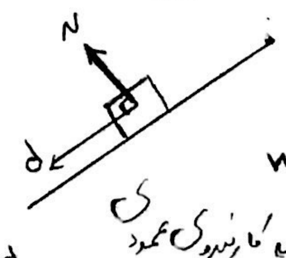
$m = 2$ تن $= 2000\,kg$

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow 4\times10^5 = \frac{p^2}{4\times10^3} \Rightarrow p^2 = 16\times10^8$$

$$p = 4\times10^4 \; kg\,m/s$$

کار نیروی عکس العمل سطح (نیروی عمودی)





$W_N = N d \cos 90^\circ = 0$

کار نیروی عمودی

۵