تعاریف

انواع طرح های تصادفی: یک طرفه و دو طرفه.

طرح های یک طرفه: طرح هایی هستند که در آن ها فقط یک متغیر مورد بررسی قرار می گیرد. تنها طرح جزو این گروه، طرح کاملاً تصادفی است.

طرح های دو طرفه: طرح هایی هستند که در آن ها بیش از یک متغیر مورد بررسی قرار می گیرد. مثل طرح بلوک های کامل تصادفی و مربع لاتین.

طرح های تصادفی پایه یا کلاسیک: شامل سه طرح می باشد: طرح کاملاً تصادفی، طرح بلوک های کامل تصادفی و طرح مربع لاتین.

آزمایش: به کلیه ی عملیاتی گفته می شود که برای رد، قبول یا تکمیل یک فرضیه و یا کشف حقیقتی روی تعدادی نمونه انجام می شود.

طرح های آزمایشی[1]: الگوهای ابداع شده ای هستند که برای انجام آزمایش ها و به دست آوردن اطلاعات دقیق و صحیح در مورد عوامل مورد مطالعه، با توجه به نوع طرح به کار می روند.

تیمار (رفتار): نمونه هایی هستند که می خواهیم روی آن ها آزمایش انجام دهیم. تیمار یا تیمارها، عامل یا عواملی هستند که محقق برای به دست آوردن اثر یا اثراتشان بر روی یک یا چند صفت بررسی می کند. در حقیقت تیمار، مقدار معینی از یک ماده ی آزمایشی یا روشی است که در آزمایش مورد آزمون قرار می گیرد.

تکرار: تعداد دفعاتی است که هر تیمار، مورد آزمایش قرار می گیرد. هرچه تعداد تکرار بیش تر شود؛ دقت[2] آزمایش افزایش می یابد ولی اگر تعداد تکرار بیش تر از حد معمول گردد؛ نه تنها دقت آزمایش زیاد نمی شود؛ بلکه موجب غیر یکنواختی آزمایش و به طور غیر مستقیم باعث افزایش اشتباه آزمایشی و نیز، موجب افزایش هزینه های آزمایش می شود. حد معمول و مناسب تکرار در مزرعه بین ۳ تا ۵ تکرار و در آزمایشگاه ۵ تا ۱۵ تکرار می باشد.

هرچند در انجام یک طرح، تعداد تکرار از اهمیت ویژه ای برخوردار است؛ اما این اهمیت به اندازه ی اهمیت. ماده ی آزمایشی و تیمارهای آزمایشی نیست.

واحد آزمایشی[3]: در آزمایش های مزرعه ای، هر قطعه مورد بررسی را یک کرت یا پلات گویند. به طور کلی، کوچک ترین قسمت از یک ماده ی آزمایشی را که در آن یک تیمار در یک تکرار مورد بررسی قرار می گیرد؛ یک واحد آزمایشی می گویند که مجموع آن، تشکیل ماده ی آزمایشی می دهد.

ماده ی آزمایشی[4]: به کار بردن تیمارها در یک آزمایش، نیاز به یک وسیله یا موجود دارد. برای نمونه، برای مقایسه ی چند رقم گندم، باید آن ها را در یک قطعه زمین بکاریم (زمین= ماده ی آزمایشی). ماده ی آزمایشی در هر آزمایش باید یک نمونه ی تصادفی از جامعه باشد تا نتایج به دست آمده، برای کل جامعه قابل تعمیم باشد.

---

[1] Experimental designs
[2] Precision
[3] Experimental unit
[4] Experimental material

داده ها (مشاهدات آماری): اندازه ها و مشاهده های انفرادی از هر متغیر را داده یا مشاهده می گوییم. به عبارتی داده ها اعداد و ارقامی هستند که از اندازه گیری یا شمارش صفت یا صفات مورد مطالعه به دست می آیند.

اثرات حاشیه: برای کم کردن اشتباه آزمایشی، به طور معمول دو خط از هر پلات و یک متر یا بیش تر، از بالا و پایین هر پلات حذف می کنند تا سطح کم تری از هر واحد آزمایشی آزمون شود و اثرات عوامل غیر قابل کنترل از بین برود. با این کار اشتباه آزمایشی کم تر می شود و دقت بالا می رود. این اثرات را اثرات حاشیه می نامند.

راه های کم نمودن اشتباه های آزمایش

۱. استفاده از مواد آزمایشی مشابه یا همگن

۲. انتساب تیمارها به واحدهای آزمایشی، به طور کامل تصادفی.

۳. افزایش تکرار آزمایش تا حد مجاز

۴. اجرای طرح مناسب

اگر دو آزمایش مشابه داشته باشیم؛ آن آزمایشی دقیق تر است که واریانس اشتباه کوچک تری داشته باشد. اما چون واریانس اشتباه دارای واحد اندازه گیری است و در طرح های مختلف بزرگی یا کوچکی آن بستگی به واحد اندازه گیری صفت مورد بررسی دارد؛ اگر بتوانیم آن را به صورت درصد بیان نماییم؛ ارزش مقایسه ای بهتری خواهد داشت. با همین هدف، پس از اجرای هر آزمایش، ضریب تغییرات یا ضریب پراکندگی[1] (CV) را که بیان کننده ی اشتباه بر حسب درصد میانگین است محاسبه می نماییم. هر چه CV آزمایش کم تر باشد؛ آن آزمایش دقیق تر است؛ زیرا اشتباه آن کوچک تر بوده است. بنابر این ضریب تغییرات (که از تقسیم جذر واریانس اشتباه آزمایش بر میانگین کل داده ها به دست می آید)؛ برای تعیین دقت آزمایش، یا مقایسه ی طرح های مختلف با هم استفاده می شود.

شرط های تجزیه واریانس

تجزیه واریانس زمانی درست است که:

۱. اشتباهات آزمایشی مستقل از هم بوده و دارای توزیع نرمال باشند.

۲. اثرات تیمار و محیط (سطر و ستون و ...) جمع پذیر باشد. یعنی بین تیمارها و محیط، اثر متقابل وجود نداشته باشد.

۳. واریانس مساوی و دارای توزیع نرمال داشته باشند. در صورتی که این شرایط برقرار نباشد؛ لازم است داده هایمان را تبدیل نماییم.

---

[1] Coefficient of variation

تجزیه واریانس ساده (طرح کاملاً تصادفی) [1]

تجزیه واریانس ساده، به دو شیوه ی یک طرفه (کاملاً تصادفی) و دو طرفه (بلوک های کامل تصادفی) انجام می شود. نیز می توان داده ها را به صورت متعادل و نامتعادل تجزیه نمود.

ساده ترین آزمایش کشاورزی، طرح کاملاً تصادفی است که در آن اختلاف بین تیمارهای یک عامل پراکندگی را بررسی می کنیم که در حقیقت عمومیت دادن مقایسه بین دو میانگین است. در این طرح، مواد آزمایشی یکنواخت و هموزن اند و همان طور که از اسم طرح پیداست؛ در آن تیمارها به طور تصادفی در کرت ها یا واحدهای آزمایشی قرار می گیرند؛ لذا هر یک از کرت ها، برای دریافت هر یک از تیمارها شانس مساوی دارند. این طرح هنگامی کاربرد دارد که واحدهای آزمایشی به طور کامل یکنواخت باشند. این گونه طرح ها برای آزمایش های گلخانه ای و آزمایشگاهی، فیتوترون ها (اتاق های رشد) و گاه دامپروری خیلی مناسب اند چون در آن ها اثرات محیط می تواند یکنواخت باشد. اما در آزمایشات مزرعه ای به دلیل عدم یکنواختی قطعات مختلف خاک، این طرح چندان قابل استفاده نیست. در آزمایش های مزرعه ای، تنها در صورت اطمینان از یکنواختی ماده ی آزمایشی (خاک)، می توان از این طرح استفاده نمود (اگر واحدهای آزمایشی دارای واریانس صفر یا خیلی ناچیز باشند؛ به معنی این است که ماده ی آزمایشی یکنواخت است). البته در مجموع این طرح از دقت پایینی برخوردار است و چون اشتباه های آزمایشی شامل همه ی تغییرات بین واحدهای آزمایشی، به جز اثر مربوط به تیمارهاست؛ بنابراین می تواند بزرگ باشد.

این طرح بیشتر در آزمایش های مقدماتی، آزمایش هایی که مقدار بذر برای ارقام مختلف یکسان نیست یا در آزمایش هایی که تعداد حیوانات برای تیمارهای مختلف متفاوت است به کار می رود. یکی از مهم ترین خصوصیات طرح قابل انعطاف بودن آن است. یعنی محقق می تواند هر تعداد تیمار و برای هر تیمار، هر تعداد تکرار را انتخاب نماید. در صورتی که دو طرح اصلی دیگر، تیمارهای مساوی برای تیمارهای مختلف لازم دارند. یعنی این طرح با داشتن بالاترین انعطاف پذیری، امکان مطالعه ی هر تعداد تیمار با هر تعداد تکرار را فراهم می کند. در این طرح، اگر تعداد تکرار برای تمام تیمارها یکسان باشد طرح را متعادل و در غیر این صورت طرح را نامتعادل می نامند. همچنین در این طرح، از بین رفتن یک یا چند واحد آزمایشی و حتی یک تیمار، تأثیر چندانی در نتایج نخواهد داشت.

مدل آماری طرح به صورت زیر است:

$$X_{ij}= \mu+T_i + e_{ij}$$

که X_{ij} برابر است با مقدار هر مشاهده در آزمایش و به ترتیب اجزای مدل عبارتند از میانگین کل، اثر تیمار و اثر اشتباه آزمایش.

* در محاسبه های دستی، اگر داده ها خیلی کوچک (به فرض در حد هزارم) و یا خیلی بزرگ باشند؛ ممکن است موجب پیچیده تر شدن محاسبه ها و افزایش احتمال اشتباه شود ولی با استفاده از نرم افزار، برایمان فرقی نمی کند که داده ها چه اندازه ای داشته باشند.

طرح کاملاً تصادفی نامتعادل، بیش تر در علوم دامی کاربرد دارد و حالتی است که تعداد تکرارها برای تیمارهای موجود در آزمایش، مساوی نیست یا دارای کرت های گم شده است.

[1] Completely randomized design

تجزیه واریانس: عبارت است از تقسیم مجموع مربعات (SS) کل به اجزای تشکیل دهنده ی آن. در طرح های کاملاً تصادفی، مجموع مربعات اشتباه و تیمار، SS کل را تشکیل می دهند.

طرح کاملاً تصادفی زمانی کاربرد دارد که واحدهای آزمایشی (به فرض کرت ها) یکنواخت بوده، اختلاف بین آنها قابل چشم پوشی باشد. این وضعیت در آزمایش های آزمایشگاهی و نیز در مشاهدات مزرعه ای یا حیوانی، در صورتی که محیط آزمایشی تقریباً یکسان باشد؛ دیده می شود.

تجزیه واریانس طرح کاملاً تصادفی متعادل (با تکرار تیمار مساوی)

منابع تغییرات	فرمول عملی	فرمول تعریفی (نظری)	درجه آزادی df
تیمار (بین تیمارها)	$SS_t = \frac{\sum_j X_{.j}^2}{r} - CF$	$\sum_i \sum_j (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{00})^2$	$t-1$
اشتباه (درون تیمارها)	$SS_e = \sum_j (\sum_i x_{ij}^2 - \frac{X_{.j}^2}{r})$	$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2$	$t(r-1), \quad or \quad n-t$
کل	$SS_T = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CF$	$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2$	$tr-1 \quad , or \quad n-1$

نکته: در تجزیه واریانس، تفریق یا جمع عدد ثابتی به تمام مشاهدات، هیچ گونه تغییری در پاسخ تجزیه نمی دهد اما ضرب یا تقسیم بر هر عدد ثابت، مقادیر SS و MS (مجموع مربعات و میانگین مربعات) را به ترتیب به نسبت مربع یا جذر عدد ثابت تغییر می دهد.

تمرین: عملکرد به کیلو در واحد سطح واریته ای از گندم تحت سه تیمار کودی A، B و C محاسبه شده است. آیا بین تیمارهای مختلف از لحاظ تأثیر بر روی عملکرد واریته های تحت آزمون، تفاوت معنی داری وجود دارد یا خیر؟

A	۴۸	۴۹	۵۰	۴۹
B	۴۷	۴۹	۴۸	۴۸
C	۴۹	۵۱	۵۰	۵۰

برای سادگی محاسبات ← -45

					$x_{.j}$	x_{ij}^2
A	۳	۴	۵	۴	۱۶	۶۶
B	۲	۴	۳	۳	۱۲	۳۸
C	۴	۶	۵	۵	۲۰	۱۰۲
					۴۸	

$$CF = \frac{X^2..}{rt \ , \Sigma r_i} = \frac{(\sum_i \sum_j x_{ij})^2}{\Sigma r_i} = \frac{(3+4+...+5)^2}{4(3)} = \frac{(48)^2}{12} = 192$$

عدد ۴۸ که به توان دو رسیده؛ حاصل جمع ۱۲ عدد است؛ به همین خاطر مخرج کسر برابر با ۱۲ است.

$$SS_t = \frac{\sum_j X_{.j}^2}{r} - CF = \frac{16^2 + 12^2 + 20^2}{4} - 192 = 8$$ تیمار

هر عدد صورت که به توان دو می رسد؛ حاصل جمع ۴ عدد است؛ به همین خاطر مخرج کسر برابر با ۴ است.

چون روی داده های خام جدول عمل جمع انجام شده است، X را بزرگ می نویسیم.

$$\text{کل } SS_T = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CF = 3^2 + 4^2 + ... + 5^2 - 192 = 14$$

چون روی داده های خام جدول عمل جمعی انجام نشده است، x را کوچک می نویسیم.

$$\text{اشتباه (فرمول عملی) } SS_e = \sum_j (\sum_i x_{ij}^2 - \frac{X_{.j}^2}{r}) = (3^2 + 4^2 + 5^2 + 4^2 - \frac{16^2}{4}) + ... + (4^2 + 6^2 + 5^2 + 5^2 - \frac{20^2}{4}) = 6$$

$$\text{اشتباه (فرمول نظری) } SS_e = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = 6(66 - \frac{16^2}{4} + ... + 102 - \frac{20^2}{4}) = 6$$

اشتباه SS = کل SS − تیمار SS = ۱۴ − ۸ = ۶

$$5.97 > F_{5\%(2,9)} = 4.26$$

چون *F* محاسباتی، از *F* جدول بزرگ تر است؛ تفاوت در سطح ۵٪ معنی دار است.

$$5.97 \langle F_{1\%(2,9)} = 8.02$$

چون *F* محاسباتی < *F* جدول، پس تفاوت در سطح ۱٪ غیر معنی دار است.

جدول تجزیه واریانس

منابع تغییرات S.o.V	درجه آزادی df	مجموع مربعات SS	میانگین مربعات *MS*	F معنی دار
تیمار	t − ۱ = ۳ − ۱ = ۲	۸	۸ ÷ ۲ = ۴	$\frac{۴}{۰/۶۷} = ۵/۹۷^*$
اشتباه	t(r − ۱) = ۹ ۳(۴ − ۱)	۶	۶ ÷ ۹ = ۰/۶۷	
کل	tr − ۱ = ۱۱ ۳(۴) − ۱	۱۴		

نکته: به جدول بالا، جدول تجزیه واریانس می گویند که مبنای نتیجه گیری طرح کاملاً تصادفی می باشد.

نکته: در جدول تجزیه واریانس، درجه آزادی هر منبع تغییر، با دیگری متفاوت بوده و فرمول هرکدام باید حفظ شود.

نکته: درجه آزادی کل می تواند از فرمول n − ۱ و درجه آزادی اشتباه از فرمول n − t هم به طور مشابه محاسبه شود.

نکته: هر MS (میانگین مربعات) مربوط به عوامل تغییر در جدول تجزیه واریانس، از حاصل تقسیم SS آن منبع تغییر بر تعداد درجات آزادی همان منبع حاصل می شود. برای کل تغییرات، نیازی به محاسبه MS کل نیست.

نکته: F کل جدول، همیشه از حاصل تقسیم MS تیمار بر MS (میانگین مربعات) اشتباه به دست می آید.

نکته: اگر F محاسباتی در سطح ۵٪ معنی دار نشد؛ در سطح ۱٪ هم معنی دار نخواهد شد و اگر در سطح ۵٪ معنی دار شود؛ ممکن است در سطح ۱٪ معنی دار شود یا شاید هم غیر معنی دار شود. ولی اگر در سطح ۱٪ معنی دار شد؛ بدون شک در سطح ۵٪ هم معنی دار خواهد بود.

نکته: همیشه می توان SS اشتباه را از تفاضل (SS تیمار− SS کل) هم محاسبه نمود و نیازی به کاربرد فرمول نیست.

ضریب تغییرات (CV): ضریب تغییرات داده های تمرین قبل را به دست آورید.

$$CV = \frac{\sqrt{MS_e}}{\bar{X}} \times 100 = \frac{\sqrt{0.67}}{\frac{48}{12}} \times 100 = 2.04\ \%$$

یادآوری: ضریب تغییرات از تقسیم انحراف معیار بر میانگین به دست می آید:

$$CV = \frac{S}{\bar{\bar{X}}} \times 100$$

تمرین: آزمایشی برای تعیین عملکرد ارقام مختلف کلزا A، B، C، D و E انجام شد. چهار کرت آزمایشی برای هر تیمار به کار رفت و عملکرد در جدولی مانند جدول زیر آورده شد. با فرض این که کرت ها دارای حاصلخیزی مشابه باشند و ارقام به طور تصادفی به کرت ها منتسب شده باشند؛ تعیین کنید که آیا بین عملکرد ارقام مختلف الف) در سطح احتمال ۵٪ ب) در سطح احتمال ۱٪ تفاوت معنی داری وجود دارد یا خیر؟

A	۲۰	۱۲	۱۵	۱۹
B	۱۷	۱۴	۱۲	۱۵
C	۲۳	۱۶	۱۸	۱۴
D	۱۵	۱۷	۲۰	۱۲
E	۲۱	۱۴	۱۷	۱۸

برای سادگی محاسبات

-10

					$x_{.j}$
A	۱۰	۲	۵	۹	۲۶
B	۷	۴	۲	۵	۱۸
C	۱۳	۶	۸	۴	۳۱
D	۵	۷	۱۰	۲	۲۴
E	۱۱	۴	۷	۸	۳۰
					$\sum x_{ij} =$ ۱۲۹

$$CF = \frac{X^2..}{rt\ ,\ \Sigma r_i} = \frac{(\sum_i \sum_j x_{ij})^2}{\Sigma r_i} = \frac{(10+2+...+8)^2}{4(5)} = 832/05$$

$$\text{تیمار}\ \varsigma\varsigma_t = \frac{\sum_j X_{.j}^2}{r} - CF = \frac{(26)^2+(18)^2+...+(30)^2}{4} - 832/05 \Rightarrow \varsigma\varsigma = 27/2$$

$$\text{کل}\ \varsigma\varsigma_T = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CF = 10^2+2^2+...+8^2-832/05 = 184/95$$

$$\text{اشتباه}\ \varsigma\varsigma = \varsigma\varsigma_{\text{کل}} - \varsigma\varsigma_{\text{تیمار}} = ۱۸۴/۹۵ - ۲۷/۲ = ۱۵۷/۷۵$$

جدول تجزیه واریانس

S.o.V	df	SS	MS	F
تیمار	t-1=۴	۲۷/۲	$\frac{۲۷/۲}{۴}=۶/۸$	$\frac{۶/۸}{۱۰/۵۲}=۰/۶۵$ ns
اشتباه	$t(r-۱)=$ $n-t=۱۵$	۱۷۵/۷۵	$\frac{۱۵۷/۷۵}{۱۵}=۱۰/۵۲$	
کل	$n-۱=$ $tr-۱=۱۹$	۱۸۴/۹۵		

$$0.65 < F_{0/5}(4,15) = 3.06$$
$$0.65 < F_{1\%}(4,15) = 4.89$$

چون F محاسباتی، از هر دو F جدول در سطوح ۱٪ و ۵٪ کوچک تر است؛ نتیجه می گیریم در این دو سطح، اختلاف معنی داری وجود ندارد.

برای مشاهده عدد مربوطه به F جدول، به جدول F مراجعه کرده، در ردیف بالا به دنبال درجه آزادی صورت کسر F (یعنی درجه آزادی تیمار که در این جا برابر با ۴ است) و در ستون چپ، به دنبال درجه آزادی مخرج کسر F (یعنی درجه آزادی اشتباه) می گردیم و عدد بین این دو درجه آزادی (یعنی ۱۵ و ۴) را به عنوان F جدول یادداشت می کنیم.

اگر اختلاف در سطح ۱٪ معنی دار بود؛ باید بالای F جدول دو ستاره و اگر در سطح ۵٪ معنی دار بود؛ بالای F جدول یک ستاره می گذاریم.

فرضاً $F = 5.97^{*}$ تمرین قبل، یعنی این که F آن جدول، در سطح احتمال ۵٪ معنی دار بوده است. به اختلاف معنی دار در سطح احتمال ۵٪ و ۱٪، به ترتیب معنی دار و بسیار معنی دار می گویند و به ترتیب با * و ** نشان می دهند.

تمرین: شرکتی می خواهد چهار نوع تایر A، B، C و D را آزمون کند. طول عمر تایرها به هزار کیلومتر، در جدول زیر ارائه شده است. تعیین کنید که آیا بین تیمارها الف) در سطح احتمال ۵٪ ب) در سطح احتمال ۱٪ تفاوت معنی داری وجود دارد یا خیر؟

A	۵۳	۶۱	۵۸	۶۴	۵۰	۵۶
B	۵۱	۶۴	۶۷	۶۱	۴۸	۵۴
C	۵۰	۵۹	۵۶	۵۳	۵۴	۴۸
D	۴۶	۵۴	۵۱	۴۸	۵۳	۵۰

							$x_{.j}$
A	۸	۱۶	۱۳	۱۹	۵	۱۱	۷۲
B	۶	۱۹	۲۲	۱۶	۳	۹	۷۵
C	۵	۱۴	۱۱	۸	۹	۳	۵۰
D	۱	۹	۶	۳	۸	۵	۳۲
							۲۲۹

$$CF = \frac{X^2..}{rt\ ,\ \Sigma r_i} = \frac{(\sum_i \sum_j x_{ij})^2}{\Sigma r_i} = \frac{(8+16+\ldots+5)^2}{6(4)} = 2185$$

$$SS_t \text{ تیمار } = \frac{\sum_j X_{.j}^2}{r} - CF = \frac{(7_2^2+\ldots+32^2)}{6} - 2185 = 204$$

$$SS_T \text{ کل } = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CF = 8^2+16^2+\ldots+5^2-2185 = 750$$

$$\text{اشتباه } SS = SS^{\text{کل}} - SS^{\text{تیمار}} = ۷۵۰-۲۰۴=۵۴۶$$

جدول تجزیه واریانس

S.o.V	df	SS	MS	F
تیمار	$t-1=3$	۲۰۴	$\frac{204}{3}=68$	$\frac{68}{27/3}=2/49$
اشتباه	$t(r-1)$ $n-t=20$	۵۴۶	$\frac{546}{20}=27/3$	
کل	$n-1=$ $tr-1=23$	۷۵۰		

$r=6$ مشاهده $t=4$ تیمار

۲/۴۹ $< F_{5\%}(3,20)=3/10$ اختلاف غیر معنی دار در سطح ۵٪

۲/۴۹ $< F_{1\%}(3,20)=4/94$ اختلاف غیر معنی دار در سطح ۱٪

نکته: از آن جایی که همه ی اعداد جداول F (در دو سطح احتمال ۱ و ۵ درصد) بزرگ تر از ۱ هستند؛ اگر میانگین مربعات تیمار (MS تیمار) از MS اشتباه کوچک تر شد؛ به دلیل این که مقدار F محاسباتی کمتر از ۱ می شود (چون $F=\frac{MS_t}{MS_e}$)، لذا بدون مراجعه به جدول F می توان نتیجه گرفت که F محاسباتی معنی دار نبوده است یعنی بین تیمارها تفاوت معنی داری وجود نداشته.

نکته: اگر دو تیمار داشته باشیم و برای مقایسه ی آنها از آزمون t و همچنین طرح کاملاً تصادفی (یکی از انواع آزمون های F) استفاده کنیم؛ مشاهده می نماییم که مقدار F جدول تجزیه واریانس طرح کاملاً تصادفی دو تیماره برابر است با t^2

همواره رابطه $F=t^2$ برقرار است.

تمرین: معلمی می خواهد سه روش مختلف تدریس ۱، ۲ و ۳ را آزمون کند. برای انجام آن سه گروه ۵ نفره دانش آموزی به تصادف انتخاب و برای هر گروه روش متفاوتی از تدریس اعمال شد. امتحان مشابهی از همه دانش آموزان گرفته و نمرات در جدول زیر آورده شده است. تعیین کنید که آیا تفاوت معنی داری بین سه روش تدریس در سطوح احتمال ۱ و ۵ درصد وجود دارد یا نه.

روش ۱	۷۵	۶۲	۷۱	۵۸	۷۳
روش ۲	۸۱	۸۵	۶۸	۹۲	۹۰
روش ۳	۷۳	۷۹	۶۰	۷۵	۸۱

روش ۱	۲۰	۷	۱۶	۳	۱۸	۶۴
روش ۲	۲۶	۳۰	۱۳	۳۷	۳۵	۱۴۱
روش ۳	۱۸	۲۴	۵	۲۰	۲۶	۹۳
						۲۹۸

$$CF=\frac{X^2..}{rt\ ,\ \Sigma r_i}=\frac{(\sum_i\sum_j x_{ij})^2}{\Sigma r_i}=\frac{(20+7+...+26)^2}{5(3)}=5920.27$$

$$\text{تیمار}\ SS_t=\frac{\sum_j X_{.j}^2}{r}-CF=\frac{(64^2+141^2+93^2)}{5}-5920.27=604.93$$

$$\text{کل}\ SS_T=\sum_i\sum_j x_{ij}^2-CF=20^2+7^2+...+26^2-5920.27=1457.73$$

$$\text{اشتباه}\ SS=\text{کل}SS-\text{تیمار}\ SS=1457.73-604.93=852.8$$

جدول تجزیه واریانس

S.o.V	df	ςς	Mς	F
تیمار	$t-1=2$	604.93	$\frac{604.93}{2}=302.46$	$\frac{302.46}{71.06}=4.26^{*}$
اشتباه	$t(r-1)$ $n-t=12$	852.8	$\frac{852.8}{12}=71.06$	
کل	$n-1=$ $tr-1=14$	1457.73		

$4.26 \rangle F_{5\%}(2,12)=3.89$ اختلاف معنی دار در سطح ٪۵

$4.26 < F_{1\%}(2,12)=6.93$ اختلاف غیر معنی دار در سطح ٪۱

طرح کاملاً تصادفی نامتعادل (دارای تعداد تکرار نامساوی تیمارها)

تمرین: جدول زیر، طول عمر نمونه ای از سه نوع مختلف لامپ تصویر تلویزیون های تولیدی یک شرکت را نشان می دهد. مشخص کنید که آیا بین سه نوع لامپ تصویر مورد بررسی، تفاوتی در سطوح احتمال ۵ و ۱ درصد وجود دارد یا خیر؟

نمونه ۱	۴۰۷	۴۱۱	۴۰۹		
نمونه ۲	۴۰۴	۴۰۶	۴۰۸	۴۰۵	۴۰۲
نمونه ۳	۴۱۰	۴۰۸	۴۰۶	۴۰۸	

						$\sum$
نمونه ۱	۷	۱۱	۹			۲۷
نمونه ۲	۴	۶	۸	۵	۲	۲۵
نمونه ۳	۱۰	۸	۶	۸		۳۲
						۸٤

$$CF=\frac{X^2..}{\Sigma r_i}=\frac{(\sum_i\sum_j x_{ij})^2}{\Sigma r_i}=\frac{(7+11+...+8)^2}{3+5+4}=588$$

$$\text{تیمار}\ \varsigma\varsigma_t=\sum_j\frac{X_{.j}^2}{r_i}-CF=\frac{(27)^2}{3}+\frac{(25)^2}{5}+\frac{(32)^2}{4}-588=36$$

$$\text{کل}\ \varsigma\varsigma_T=\sum_i\sum_j x_{ij}^2-CF=7^2+11^2+...+8^2-588=72$$

$$\text{اشتباه}\ \varsigma\varsigma=\varsigma\varsigma_T-\varsigma\varsigma_t=72-36=36$$

جدول تجزیه واریانس

S.o.V	df	ςς	Mς	F
تیمار	$t-1=2$	36	$\frac{36}{2}=18$	$\frac{18}{4}=4.5^{*}$
اشتباه	$n-t=12-3=9$	36	$\frac{36}{9}=4$	
کل	$n-1=12-1=11$	72		

$$4.5 > F_{5\%(2,9)} = 4.26$$

چون F محاسباتی، از F جدول بزرگ تر است؛ تفاوت در سطح ۵٪ معنی دار است.

$$4.5 \langle F_{1\%(2,9)} = 8.02$$

چون F محاسباتی > F جدول، پس تفاوت در سطح ۱٪ غیر معنی دار است.

تمرین: جدول زیر، نمره های تعدادی دانشجو را در دروس مختلف نشان می دهد. آیا بین نمره های این چهار درس، تفاوت معنی داری وجود دارد یا خیر؟

ژنتیک	۷۲	۸۰	۸۳	۷۵	
طرح	۸۱	۷۴	۷۷		
آمار	۸۸	۸۲	۹۰	۸۷	۸۰
اکولوژی	۷۴	۷۱	۷۷	۷۰	

ژنتیک	۷	۱۵	۱۸	۱۰		۵۰
طرح	۱۶	۹	۱۲			۳۷
آمار	۲۳	۱۷	۲۵	۲۲	۱۵	۸۷
اکولوژی	۹	۶	۱۲	۵		۳۲
						۲۰۶

در ابتدا برای ساده تر شدن محاسبات، از تک تک داده ها، ۶۵ واحد کسر کرده ایم.

$$CF = \frac{X^2..}{\Sigma r_i} = \frac{(\sum_i \sum_j x_{ij})^2}{\Sigma r_i} = \frac{(7+15+...+5)^2}{4+3+5+4} = 2652.25$$

$$\text{تیمار } SS_t = \sum_j \frac{X_{.j}^2}{r_i} - CF = \frac{(50)^2}{4} + \frac{(37)^2}{3} + \frac{(87)^2}{5} + \frac{(32)^2}{4} - 2652.25 = 198.88$$

$$\text{کل } SS_T = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CF = 7^2 + ... + 15^2 - 2652.25 = 964.75$$

$$\text{اشتباه } SS = SS_{\text{کل}} - SS_{\text{تیمار}} = 964.75 - 198.88 = 756.87$$

جدول تجزیه واریانس

S.o.V	df	SS	MS	F
تیمار	$t-1=4-1=3$	198.88	$\frac{198.88}{3}=66.29$	$\frac{66.29}{63.07}=1.05^{ns}$
اشتباه	$n-t=16-4=12$	756.87	$\frac{756.87}{12}=63.07$	
کل	$n-1=16-1=15$	964.75		

$$1.05 \prec F_{5\%(3,12)} = 3.49$$

چون F محاسباتی، از F جدول کوچک تر است؛ تفاوت در سطح ۵٪ معنی دار نیست.

$$1.05 \prec F_{1\%(3,12)} = 5.95$$

چون F محاسباتی، از F جدول کوچک تر است؛ تفاوت در سطح ۱٪ معنی دار نیست.

تمرین: داده های زیر مربوط به یک طرح کاملاً تصادفی (CRD) می باشد. MS خطای آزمایشی را از طرق مختلف به دست آورید.

تکرار	تیمار A	تیمار B	تیمار C
1	15	18	11
2	12	20	20
3	17	28	15
4	12	13	17

جواب

تکرار	تیمار A	تیمار B	تیمار C
1	15	18	11
2	12	20	20
3	17	28	15
4	12	13	17
	∑=56	∑=79	∑=63

$$CF=\frac{(X...)^2}{rt}=\frac{(198)^2}{(4)(3)}=3267$$

تیمار $$SS_t=\frac{\sum_j X_{0j}^2}{r}-CF=\frac{56^2+79^2+63^2}{4}-3267=\frac{13346}{4}-3267=69.5$$

کل $$SS_T=\sum_i\sum_j x_{ij}^2-CF=\left[15^2+...+17^2\right]-3267=3514-3267=247$$

روش اول محاسبه ی SS اشتباه

اشتباه $$SS_E=SS_T-SS_t=247-69.5=177.5$$

روش دوم محاسبه ی SS اشتباه

$$SS_E=\sum_j\left(\sum_i x_{ij}^2-\frac{X_{0j}^2}{r}\right)=$$

$$(15^2+...+12^2-\frac{56^2}{4})+...+(11^2+...+17^2-\frac{63^2}{4})=177.5$$

بعد از محاسبه ی SS اشتباه به یکی از دو روش مذکور، می توان واریانس اشتباه را محاسبه نمود.

$$MS_E=\frac{SS_e}{df_e}=\frac{177.5}{t(r-1)}=\frac{177.5}{9}=19.72$$

تمرین: پس از تکمیل جدول زیر، معنی دار بودن F مشاهده شده را در سطح α = ۰/۰۵ بررسی کنید.

منابع تغییرات	df	SS	MS	F
تیمار				
خطا	۲۰۰	۱۰		
کل	۳۰۰	۱۲		

***

جواب

منابع تغییرات	df	SS	MS	F
تیمار	۳۰۰ −۲۰۰ =۱۰۰	۱۲−۱۰ =۲	۲÷۱۰۰ = ۰/۰۲	۰/۰۲ ÷۰/۰۵ = ۰/۴
خطا	۲۰۰	۱۰	۱۰÷۲۰۰ = ۰/۰۵	–
کل	۳۰۰	۱۲	–	–

تمرین: پس از تکمیل جدول تجزیه واریانس زیر، معنی داری F مشاهده شده را در سطح α = 0.01 بررسی کنید.

منبع تغییرات	df	SS	MS	F
بین گروهی	۵			
درون گروهی		۵۰۱۸		
کل	۱۳	۹۹۹۸/۹۳		

***

جواب

منبع تغییرات	df	SS	MS	F
بین گروهی	۵	۴۹۸۰/۹۳	۹۹۶/۱۸۶	۱/۵۹
درون گروهی	۸	۵۰۱۸	۶۲۷/۲۵	-
کل	۱۳	۹۹۹۸/۹۳	-	-

تمر

منبع تغییرات	درجه آزادی	SS	MS	F
تیمار	2	8	4	Y
اشتباه	9	X		
کل		14		

***

منبع تغییرات	درجه آزادی	SS	MS	F
تیمار	2	8	8÷2=4	4÷0.67=5.97
اشتباه	9	14-8=6	6÷9=0.67	
کل	2+9=11	14		

۱. آزمون حداقل تفاوت معنی دار (LSD)

این آزمون زمانی کاربرد دارد که F جدول تجزیه واریانس معنی دار شده باشد (شرط لازم و واجب). همچنین وقتی در آزمایش شاهد به کار رفته و مقایسه تیمارها با شاهد مدنظر است می توان از LSD استفاده نمود. زمانی که تعداد تیمارها کم و تفاوت میانگین ها زیاد باشد هم می توان از LSD استفاده نمود. در آزمون LSD احتمال اشتباه نوع اول، نسبت به همه ی روش های مقایسه میانگین دیگر زیادتر است. یعنی ممکن است تفاوت بین دو میانگین معنی دار نباشد اما آزمون LSD اختلاف را معنی دار نشان دهد.

برای انجام این آزمون ابتدا باید مقدار LSD محاسبه شود

$$LSD_{\alpha} = S_{\bar{d}} \times t_{(\alpha, df_e)}$$

df_e = درجه آزادی اشتباه آزمایشی

α = سطح احتمال

t مقداری که از جداولی موسوم به جدول t استخراج می شود.

$S_{\bar{d}}$ سنجه ی اشتباه اختلاف بین میانگین های تیمارها یا به طور ساده تر سنجه ی اختلاف. زمانی که تکرارهای تیمارها مساوی است؛ اختلاف استاندارد از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{2MS_e}{r}}$$

در رابطه ی بالا، MSe و r به ترتیب، واریانس اشتباه آزمایشی و تعداد تکرارها هستند.

پس از محاسبه ی مقدار LSD به کمک روابط بالا، اگر تفاوت بین دو میانگین تحت بررسی از مقدار LSD کوچک تر باشد؛ دو تیمار اختلاف معنی داری ندارند و در یک گروه آماری قرار می گیرند؛ اما اگر این اختلاف بیشتر از عدد محاسبه شده LSD بود؛ یعنی بین دو تیمار تفاوت معنی دار وجود دارد.

برای تمرین A (بررسی اثر مقادیر مختلف ۰ تا ۱۰۰ قسمت در میلیون کود فسفر که در کلاس حل شده)

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{2MS_e}{r}} = \sqrt{\frac{2(2.33)}{4}} = 1.079352$$

$$LSD_{\alpha} = S_{\bar{d}} \times t_{(\alpha, df_e)} = 1.079352(2.947) = 3.18$$

مقایسه های ممکن در مثال یاد شده (بین تیمار شاهد (۰ قسمت در میلیون) و سایر تیمارها) به شرح زیر است:

$$\bar{x}_{25} - \bar{x}_0 = 20.75 - 11.75 = 9.00 \succ 3.18$$

$$\bar{x}_{50} - \bar{x}_0 = 24.00 - 11.75 = 12.25 \succ 3.18$$

$$\bar{x}_{75} - \bar{x}_0 = 26.25 - 11.75 = 14.50 \succ 3.18$$

$$\bar{x}_{100} - \bar{x}_0 = 26.75 - 11.75 = 11.75 \succ 3.18$$

چون تفاوت بین همه ی جفت میانگین های تحت بررسی از مقدار LSD بزرگ تر باشد؛ همه ی اختلافات جفتی مشاهده شده معنی داری هستند.

۲. آزمون دانت (Dunnett)

دقت این آزمون اندکی بیشتر از LSD است و برای مواقعی که مقایسه ی تمام تیمارها با یک شاهد مدنظر است؛ کاربرد دارد. در این روش که بسیار مشابه روش LSD است؛ به جای استفاده از جدول t از جدول t' استفاده می شود که اعداد این جدول، از اعداد جدول t کمی بزرگ ترند. تفاوت دیگر جدول های t و t' این است که در جدول t' تعداد مقایسه های تیمارها با شاهد (p=t-1) نیز وارد شده است. برای به دست آوردن مقدار t' از این جدول، تعداد درجه های آزادی اشتباه آزمایش از ستون سمت چپ جدول و تعداد مقایسه ها (p) را از ردیف بالای جدول پیدا کرده و تقاطع این دو مقدار t' را در سطح آماری یک یا پنج درصد نشان می دهد. اصولاً تفاوت هایی که به وسیله ی آزمون دانت معنی دار می شوند؛ از راه آزمون LSD هم معنی دار خواهند شد اما برعکس این حالت ممکن است درست نباشد.

در تمرین A با ۱۵ درجه آزادی برای خطا و سطح آماری ۱ درصد و تعداد p=4 مقایسه، مقدار t' برابر با 3.59 خواهد بود. اکنون از فرمول زیر برای یافتن کمترین اختلاف معنی دار–در اینجا به نام d' استفاده می کنیم.

$$d' = S_{\bar{d}}(t') = 1.079352(3.59) = 3.87$$

چون تفاوت بین همه ی جفت میانگین های تحت بررسی از مقدار d' محاسبه شده (3.87) بزرگ تر است؛ همه ی اختلافات جفتی مشاهده شده معنی داری هستند.

۳. آزمون چند دامنه ای دانکن (Duncan)

این آزمون قوی تر از آزمون LSD بوده و در شرایطی که LSD کارا نیست هم قابل اجراست. در واقع گاهی ممکن است میانگین تیمارها در آزمایش به یکدیگر نزدیک باشند و در دو طرف میانگین کل آزمایش طوری قرار بگیرند که اختلاف آنها نسبت به آن بسیار کم باشد و این اختلاف ها یکدیگر را خنثی کنند. آن گاه تجزیه واریانس، اثر تیمار را معنی دار نشان نمی دهد؛ و لذا آزمون LSD هم این اختلاف را نشان نمی دهد؛ اما آزمون Duncan قابلیت تفکیک آن را دارد. این آزمون چنان چه F تجزیه واریانس معنی دار نشود و یا شاهدی در آزمایش وجود نداشته باشد باز هم قابلیت استفاده دارد.

برای انجام این آزمون ابتدا باید اشتباه استاندارد میانگین های تیمارها ($S_{\bar{x}}$) محاسبه شود

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{EMS}{r}}$$

سپس باید مقدار LSR را محاسبه نمود

$$SSR_{\alpha} = (\alpha, df_e, p = n)$$

$$LSR_{\alpha} = S_{\bar{X}}(SSR_{\alpha})$$

برای محاسبه LSR باید به جدولی به شکل زیر مراجعه کرد و با توجه به سطح احتمال انتخابی و درجه آزادی، ابتدا SSR و سپس LSR را برای هر دامنه تحت بررسی (از p=2 تا p=n) به طور جداگانه پیدا نمود.

دامنه (p)	2	3	4		
df_e, SSR_{α}	x_2	x_3	x_4	…	x_t
df_e, LSR_{α}	y_2	y_3	y_4	…	y_t

در کتاب های آماری، در جداولی آماده و در دسترس، به جای x و y، مقادیر مورد نیاز ارائه شده است.

در پایان، میانگین تیمارها به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب و به طور جفتی، دو به دو مقایسه می شوند.

در تمرین A

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{EMS}{r}} = \sqrt{\frac{2.33}{4}} = 0.763217$$

$$LSR_{\alpha} = S_{\overline{X}}(SSR_{\alpha})$$

دامنه (p)	2	3	4	5
$SSR_{1\%}$	4.17	4.37	4.50	4.58
$LSR_{1\%}$	4.17(0.7763217)=3.18	4.37(0.7763217)=3.34	4.50(0.7763217)=3.44	4.58(0.7763217)=3.50

میانگین تیمارهای یک تا پنج را به ترتیب از بزرگ به کوچک یا برعکس مرتب می کنیم.

تفاوت میانگین تیمارها را با عدد LSR مربوط به دامنه ی مورد نظر مقایسه می کنیم. فرضاً تفاوت ۲۶/۷۵ و ۲۶/۲۵ برابر با ۰/۵ و از مقدار LSR مربوط به دامنه ی p=2 یعنی ۳/۱۸ کوچک تر است. لذا تفاوت بین این دو تیمار معنی دار نبوده و دو تیمار در یک گروه آماری قرار دارند. پس زیر هر دو یک خط می کشیم. تفاوت ۲۶/۷۵ و ۲۴/۰۰ برابر با ۲/۵۷ و از مقدار LSR مربوط به دامنه ی p=3 یعنی ۳/۳۴ کوچک تر است. لذا تفاوت بین این سه تیمار معنی دار نبوده و سه تیمار در یک گروه آماری قرار دارند. پس خط را ادامه می دهیم. چون تفاوت ۲۶/۷۵ و ۲۰/۷۵ برابر با ۶/۰۰ و از مقدار LSR مربوط به دامنه ی p=4 یعنی ۳/۴۴ بزرگ تر است. لذا تفاوت معنی دار نبوده و نمی توان خط را ادامه داد. پس خط تا همان تیمار سوم بیشتر ادامه پیدا نمی کند. حال نوبت مقایسه ی تیمار دوم با تیمارهای بعدی است و این روال را تا انتها ادامه می دهیم.

11.75 20.75 24.00 26.25 26.75

۴. آزمون توکی (Tukey یا HSD)

این روش آزمون اختلاف معنی دار حقیقی نامیده می شود و مانند دانکن با دامنه اختلاف ها سر و کار دارد اما مانند آزمون LSD فقط یک مقدار ثابت محاسبه شده و تمام اختلاف ها نسبت به آن سنجیده می شود

برای تمرین A

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{EMS}{r}} = \sqrt{\frac{2.33}{4}} = 0.763217$$

$$w_{\alpha} = S_{\bar{x}} \times q_{(\alpha, df_e)} = 0.763217(5.56) = 4.24$$

میانگین تیمارهای یک تا پنج را به ترتیب از بزرگ به کوچک یا برعکس مرتب می کنیم.

11.75 20.75 24.00 26.25 26.75

۵. آزمون استیودنت-نیومن-کویلز (SNK)

روش SNK مانند روش دانکن یک آزمون چند دامنه ای است ولی برای محاسبه حداقل دامنه های معنی دار اعداد جدول توکی مورد استفاده قرار می گیرد.

در تمرین A

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{EMS}{r}} = \sqrt{\frac{2.33}{4}} = 0.763217$$

سپس باید مقدار Wα را محاسبه نمود

$$W_\alpha = S_{\bar{X}}(q_\alpha)$$

دامنه (p)	2	3	4	5
$q_{1\%}$	4.17	4.83	5.25	5.56
$W_{1\%}$	4.17(0.7763217)=3.18	4.83(0.7763217)=3.69	5.25(0.7763217)=4.01	4.56(0.7763217)=4.24

میانگین تیمارهای یک تا پنج را به ترتیب از بزرگ به کوچک یا برعکس مرتب می کنیم.

11.75	20.75	24.00	26.25	26.75

مقدار W_α در حالت p=2 برابر با مقدار LSD و در حالت p=5 برابر با مقدار W_α آزمون توکی است و بنابراین آزمون SNK به طور غیر مستقیم جواب این آزمون ها را هم دربر می گیرد.

برای طرح کاملاً تصادفی نامتعادل

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)MS_e}$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\frac{MS_e}{2}}$$

طرح بلوک های کامل تصادفی [۱]

در آزمایشات مزرعه ای، زمین آزمایش ممکن است دارای شیب یک جهته باشد. این شیب می تواند نتیجه اثر عواملی چون بافت خاک، pH یا شوری زمین باشد. برای حذف اثرات شیب زمین باید زمین را به بلوک هایی تقسیم کرد، به طوری که واحد های آزمایشی درون هر بلوک از یکنواختی بیشتری برخوردار باشند. تعداد واحدهای آزمایشی مساوی تعداد تیمار در هر گروه باشد لذا هر گروه را یک بلوک کامل یا یک تکرار می نامند. در داخل هر بلوک، تعداد واحدهای آزمایشی، به اندازه ی تعداد تیمار است. طرح بلوک های کامل تصادفی، این امکان را برای پژوهش گر فراهم می کند که مقدار تفاوت های ناشی از عدم یکنواختی مواد آزمایشی را تفکیک و مقادیر واقعی تر میانگین تیمارها و اشتباه آزمایشی را محاسبه نماید. واریانس اشتباه طرح بلوک کامل تصادفی از طرح کاملاً تصادفی بیش تر و درجه آزادی اشتباه آن کوچک تر است. به طور کلی درجه آزادی اشتباه زیر ۱۰ نامطلوب قلمداد می شود. در آزمایش های مزرعه ای، بلوک ها را عمود بر روند غیر یکنواختی زمین انتخاب می کنند. در آزمایشات روی جانوران، بلوک ها را بر اساس تشابهات وزنی، سنی و غیره تشکیل می دهند. در سطح مزرعه می توان بلوک ها را مجاور یا دور از هم قرار داد؛ اما باید کرت های داخل یک بلوک مجاور یکدیگر باشند. عملیات کاشت، داشت و برداشت واحدهای درون هر بلوک باید به طور یکنواخت و مشابه انجام شود. علاوه بر کنترل تغییرات یک جهته، دلایل دیگری نیز برای گروه بندی (بلوک بندی) واحد های آزمایشی از جمله تقسیم کار و تنظیم برنامه وجود دارد. برای نمونه اگر در اجرای طرح از افراد مختلف کمک گرفته شود هر بلوک مبنای تقسیم کار قرار گرفته و هر فرد عملیات یا اندازه گیری های یک بلوک را انجام می دهد. همچنین در آزمون های کیفی (طعم شیرینی یا غذا) چون سلیقه یا ذائقه ی افراد متفاوت است؛ افراد مختلف به عنوان بلوک منظور می شوند. بهترین منابع تغییری که به عنوان اساس بلوک بندی به کار می روند عبارتند از: غیر یکنواختی خاک، مسیر مهاجرت حشرات، شیب مزرعه در مطالعه عکس العمل گیاه به تنش آبی و ... می باشند. تعداد تیمار با توجه به اهداف آزمایش باید حتی الامکان اندک باشند. زیرا افزایش تعداد تیمارها باعث بزرگ شدن اندازه بلوک و در نتیجه موجب افزایش تغییر در داخل بلوک خواهد شد و گیاهان تحت بررسی ابتدا و انتهای یک بلوک خیلی بزرگ، مشابه با گیاهان کشت شده در دو بلوک متفاوت با اندازه متعادل با یکدیگر تفاوت خواهند داشت که این تفاوت در نتایج ایجاد اشتباه می نماید. طرح بلوک های کامل تصادفی در مقایسه با طرح کاملاً تصادفی، دارای SS و MS اشتباه کوچک تری است؛ لذا دقت بیش تری دارد.

برخلاف طرح کاملاً تصادفی، در این طرح، اگر یک یا چند مشاهده از بین برود؛ نیاز به تخمین و برآورد کرت های از دست رفته داریم و تنها پس از این کار و به تعادل در آمدن طرح، مجاز به انجام تجزیه های آماری هستیم؛ ولی می توان یک تیمار یا یک بلوک را به طور کلی حذف و تجزیه ها را بدون در نظر گرفتن اثرات آن ها انجام داد. اگر ماده ی آزمایشی دارای تغییرات دوجهته باشد؛ کاربرد طرح بلوک های کامل تصادفی چندان سودمند نیست و بهتر است از طرح مربع لاتین استفاده شود. همچنین زمانی که تعداد بلوک ها از ۱۵ بلوک بیش تر می شود؛ دقت آزمایش به دلیل تفاوت زیاد بین بلوک ها ممکن است کم شود.

تصادفی کردن، در طرح بلوک های کامل تصادفی، دو مرحله ای است. مرحله ی نخست، انتساب تیمارها به واحدهای آزمایشی داخل هر بلوک و مرحله ی دوم، تصادفی کردن بلوک ها است.

---

[1] Randomized complete block design

مدل آماری طرح

$X_{ij}= \mu+ T_i+T_j+ e_{ij}$

که X_{ij} برابر با مقدار هر مشاهده در آزمایش و به ترتیب اجزای مدل عبارتند از میانگین کل، اثر بلوک، اثر تیمار و اثر اشتباه آزمایش.

مقدار F مربوط به بلوک در طرح بلوک های کامل تصادفی، تفاوت بین میانگین بلوک های محل انجام آزمایش را نشان می دهد و تنها برای همان منطقه و همان محل بلوک ها ارزشمند و قابل استناد و استفاده است و در گزارش های نهایی توسط پژوهشگر ذکر نمی شود.

جدول تجزیه واریانس طرح بلوک های کامل تصادفی

درجه آزادی df	فرمول عملی	منابع تغییرات
$tr-1 \;\; , or \;\; n-1$	$SS_T=\sum_i\sum_j x_{ij}^2-CF$	کل
$r-1$	$SS_b=\sum_i \frac{X_{i.}^2}{t}-CF$	بلوک
$t-1$	$SS_t=\sum_j \frac{\sum_j X_{.j}^2}{r}-CF$	تیمار (بین تیمارها)
$(t-1)(r-1)$	$SS_e=SS_T-SS_t-SS_b$	اشتباه (درون تیمارها)

نکته: در تجزیه واریانس، تفریق یا جمع عدد ثابتی به تمام مشاهدات، هیچ گونه تغییری در پاسخ تجزیه نمی دهد اما ضرب یا تقسیم بر هر عدد ثابت، مقادیر SS و MS (مجموع مربعات و میانگین مربعات) را به ترتیب به نسبت مربع یا جذر عدد ثابت تغییر می دهد.

تمرین: ۵ تیمار A، B، C، D و E در یک طرح بلوک های کامل تصادفی با ۴ تکرار (بلوک) مقایسه و نتایج به شرح جدول زیر مشاهده شده است. آیا بین تیمارهای مختلف تحت آزمون، تفاوت معنی داری وجود دارد یا خیر؟

	تیمارها					
تکرار یا بلوک	A	B	C	D	E	جمع تکرار
۱	۹۲	۲۰	۷۷	۶۲	۵۲	۳۰۳
۲	۸۹	۱۸	۹۰	۷۴	۶۸	۳۳۹
۳	۸۱	۳۲	۸۸	۵۵	۴۵	۳۰۱
۴	۷۹	۱۴	۸۵	۸۱	۳۸	۲۹۷
	۳۴۱	۸۴	۳۴۰	۲۷۲	۲۰۳	∑=۱۲۴۰
	۸۵/۲۵	۲۱/۰۰	۸۵/۰۰	۶۸/۰۰	۵۰/۷۵	میانگین تیمار

فاکتور تصحیح $CF=\frac{X^2..}{rt=n}=\frac{(92+89+...+38)^2}{4(5)=20}=\frac{(1240)^2}{20}=76880.00$

عدد ۱۲۴۰ که به توان دو رسیده؛ حاصل جمع ۲۰ عدد است؛ به همین خاطر مخرج کسر برابر با ۲۰ است.

چون روی داده های خام جدول عمل جمع انجام شده است، X را بزرگ می نویسیم.

$$SS_T = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CF = 92^2 + 89^2 + \dots + 38^2 - 76880.00 = 12952.00$$ کل

چون روی داده های خام جدول عمل جمعی انجام نشده است، x را کوچک می نویسیم.

$$SS_b = \sum_i \frac{X_{i.}^2}{t} - CF = \frac{303^2 + 339^2 + \dots + 297^2}{5} - 76880.00 = 228.00$$ بلوک

هر عدد صورت که به توان دو می رسد؛ حاصل جمع ۵ عدد است؛ به همین خاطر مخرج کسر برابر با ۵ است.

چون روی داده های خام جدول عمل جمع انجام شده است، X را بزرگ می نویسیم.

$$SS_t = \sum_j \frac{X_{.j}^2}{r} - CF = \frac{341^2 + 84^2 + \dots + 203^2}{4} - 76880.00 = 11652.50$$ تیمار

هر عدد صورت که به توان دو می رسد؛ حاصل جمع ۴ عدد است؛ به همین خاطر مخرج کسر برابر با ۴ است.

$$SS_e = SS_T - SS_t - SS_b = 12952.00 - 11652.50 - 228.00 = 1071.50$$ اشتباه

برای بلوک

$$0.85 \prec F_{5\%(3,12)} = 3.49$$

چون *F* محاسباتی، از *F* جدول کوچک تر است؛ تفاوت در سطح ۵٪ غیر معنی دار است.

برای تیمار

$$32.62 \succ F_{1\%(4,12)} = 5.41$$

چون *F* محاسباتی، از *F* جدول بزرگ تر است؛ تفاوت در سطح ۱٪ معنی دار است.

جدول تجزیه واریانس

S.o.V منابع تغییرات	df درجه آزادی	SS مجموع مربعات	MS میانگین مربعات	F معنی دار
بلوک	$r-1=3$	228.00	$\frac{228.00}{3}=76.00$	$\frac{76.00}{89.29}=0.85^{ns}$
تیمار	$t-1=4$	11652.50	$\frac{11652.50}{4}=2913.12$	$\frac{2913.12}{89.29}=32.62^{**}$
اشتباه	$(t-1)(r-1)=12$	1071.50	$\frac{1071.50}{12}=89.29$	
کل	$tr-1=19$	12952.00		

نکته: در جدول تجزیه واریانس، درجه آزادی هر منبع تغییر، با دیگری متفاوت بوده و فرمول هرکدام باید حفظ شود.

نکته: هر MS (میانگین مربعات) مربوط به عوامل تغییر در جدول تجزیه واریانس، از حاصل تقسیم SS آن منبع تغییر بر تعداد درجات آزادی همان منبع حاصل می شود. برای کل تغییرات، نیازی به محاسبه MS کل نیست.

نکته: F کل جدول، همیشه از حاصل تقسیم MS تیمار بر MS (میانگین مربعات) اشتباه به دست می آید.

نکته: نتیجه ی F بلوک، فقط برای همان محل انجام آزمایش ارزشمند است و معمولاً در گزارش نهایی اعلام نمی شود و تنها F تیمار است که در طرح بلوک های کامل تصادفی برایمان مهم است.

نکته: در طرح بلوک های کامل تصادفی، همیشه می توان SS اشتباه را از تفاضل (SSبلوک- SS تیمار- SS کل) هم محاسبه نمود و نیازی به کاربرد فرمول نیست.

ضریب تغییرات (CV): ضریب تغییرات داده های تمرین قبل را به دست آورید.

ضریب تغییرات از تقسیم انحراف معیار بر میانگین به دست می آید:

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} \times 100$$

برای داده های جدول

$$CV = \frac{\sqrt{MS_e}}{\bar{X}} \times 100 = \frac{\sqrt{89.29}}{\frac{1240}{20}} \times 100 = 15.24\ \%$$

تمرین: شش تیمار یک تا شش در یک طرح بلوک های کامل تصادفی با ۳ تکرار مقایسه و نتایج به شرح جدول زیر مشاهده شده است. آیا بین تیمارهای مختلف تحت آزمون، تفاوت معنی داری وجود دارد یا خیر؟

تکرار	تیمارها 6	5	4	3	2	1	جمع تکرار
1	25.0	20.3	14.2	17.2	15.5	12.3	104.5
2	24.2	19.7	15.1	18.0	17.1	14.1	108.2
3	24.6	22.4	16.0	17.6	16.9	13.5	111
	73.8	*62.4*	*45.3*	*52.8*	*49.5*	*39.9*	∑=1240
	24.6	*20.8*	*15.1*	*17.6*	*16.5*	*13.3*	**میانگین تیمار**

فاکتور تصحیح $CF = \frac{X^2..}{rt=n} = \frac{(12.3+...+24.6)^2}{3(6)=18} = \frac{(323.7)^2}{18} = 5821.205$

عدد ۳۲۳/ ۷ که به توان دو رسیده؛ حاصل جمع ۱۸ عدد است؛ به همین خاطر مخرج کسر برابر با ۱۸ است.

چون روی داده های خام جدول عمل جمع انجام شده است، X را بزرگ می نویسیم.

کل $SS_T = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CF = 12.3^2 + ... + 24.6^2 - 5821.205 = 262.40$

چون روی داده های خام جدول عمل جمعی انجام نشده است، x را کوچک می نویسیم.

بلوک $SS_b = \sum_i \frac{X_{i.}^2}{t} - CF = \frac{104.5^2 + 108.2^2 + 111^2}{6} - 5821.205 = 3.543$

هر عدد صورت که به توان دو می رسد؛ حاصل جمع ۶ عدد است (۶ تیمار موجود در هر تکرار)؛ به همین خاطر مخرج کسر برابر با ۶ است.

چون روی داده های خام جدول عمل جمع انجام شده است، X را بزرگ می نویسیم.

$$\text{تیمار } SS_t = \sum_j \frac{X_{.j}^2}{r} - CF = \frac{39.9^2 + \ldots + 73.8^2}{3} - 5821.205 = 252.925$$

هر عدد صورت که به توان دو می رسد؛ حاصل جمع ۳ عدد است (۳ تکرار هر تیمار) به همین خاطر مخرج کسر برابر با ۳ است.

$$\text{اشتباه } SS_e = SS_T - SS_t - SS_b = 262.40 - 252.925 - 3.543 = 5.937$$

برای بلوک

$$2.98 \prec F_{5\%(2,10)} = 4.10$$

چون F محاسباتی، از F جدول کوچک تر است؛ تفاوت در سطح ۵٪ غیر معنی دار است.

برای تیمار

$$85.21 \succ F_{1\%(5,10)} = 5.64$$

چون F محاسباتی، از F جدول بزرگ تر است؛ تفاوت در سطح ۱٪ معنی دار است.

جدول تجزیه واریانس

S.o.V منابع تغییرات	df درجه آزادی	SS مجموع مربعات	MS میانگین مربعات	F معنی دار
بلوک	$r-1=2$	3.543	$\frac{3.543}{2}=1.772$	$\frac{1.772}{0.594}=2.98^{ns}$
تیمار	$t-1=5$	252.925	$\frac{252.925}{5}=50.585$	$\frac{50.585}{0.594}=85.21^{**}$
اشتباه	$(t-1)(r-1)=10$	5.937	$\frac{5.937}{10}=0.594$	
کل	$tr-1=17$	262.405		

نکته: نتیجه ی F بلوک، فقط برای همان محل انجام آزمایش ارزشمند است و معمولاً در گزارش نهایی اعلام نمی شود و تنها F تیمار است که در طرح بلوک های کامل تصادفی برایمان مهم است.

نکته: در طرح بلوک های کامل تصادفی، همیشه می توان SS اشتباه را از تفاضل (SSبلوک− SS تیمار− SS کل) هم محاسبه نمود و نیازی به کاربرد فرمول نیست.

ضریب تغییرات (CV): ضریب تغییرات داده های تمرین قبل را به دست آورید.

ضریب تغییرات از تقسیم انحراف معیار بر میانگین به دست می آید:

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} \times 100$$

برای داده های جدول

$$CV = \frac{\sqrt{MS_e}}{\bar{X}} \times 100 = \frac{\sqrt{0.594}}{\frac{323.7}{18}} \times 100 = 4.29\ \%$$

تخمین کرت های از دست رفته در طرح بلوک های کامل تصادفی

الف: یک کرت از دست رفته

تکرار یا بلوک	A	B	C	D	جمع تکرار
۱	۳۸/۳	۲۶/۵	۳۵/۲	۳۸/۱	۱۳۸/۱
۲	۳۷/۰	۲۴/۳	۲۹/۷	۳۲/۴	۱۲۳/۴
۳	۴۰/۴	۲۲/۲	۳۱/۴	۳۵/۵	۱۲۹/۵
۴	۴۲/۳	**الف**	۳۰/۲	۳۷/۲	R=۱۰۹/۷
۵	۳۹/۵	۲۳/۷	۳۲/۷	۳۳/۶	۱۲۹/۵
جمع تیمار	۱۹۷/۵	V=۹۶/۷	۱۵۹/۲	۱۷۶/۸	G=۶۳۰/۲

فرمول ییتز

$$x = \frac{tV + rR - G}{(r-1)(t-1)}$$

در این فرمول، V جمع تیماری است که در آن یک کرت از دست رفته است؛ R جمع تکراری است که در آن یک کرت از دست رفته و G، جمع کل داده هاست. R تعداد تکرارها یا بلوک ها و t تعداد تیمارهاست.

$$x = \frac{tV + rR - G}{(r-1)(t-1)} = \frac{4(96.7) + 5(109.7) - 630.2}{(5-1)(4-1)} = 25.425 = 25.4$$

نکته: به ازای هر کرت گم شده، یک درجه از درجه های آزادی خطا و کل در جدول تجزیه واریانس کسر می شود.

ب: دو کرت از دست رفته

تکرار یا بلوک	A	B	C	D	جمع تکرار
۱	۳۸/۳	۲۶/۵	۳۵/۲	۳۸/۱	۱۳۸/۱
۲	۳۷/۰	۲۴/۳	۲۹/۷	۳۲/۴	۱۲۳/۴
۳	۴۰/۴	**الف**	۳۱/۴	۳۵/۵	۱۰۷/۳
۴	۴۲/۳	۲۵/۴	۳۰/۲	۳۷/۲	۱۳۵/۱
۵	۳۹/۵	۲۳/۷	**ب**	۳۳/۶	۹۶/۸
جمع تیمار	۱۹۷/۵	۹۹/۹	۱۲۶/۵	۱۷۶/۸	۶۰۰/۷

ابتدا با فرمول مقدماتی زیر (دقت به نسبت کمی دارد) کرت الف را تخمین می زنیم.

کرت الف

$$= \frac{\overline{X}_{i.} + \overline{X}_{.j}}{2} = \frac{\frac{107.3}{3} + \frac{99.9}{4}}{2} = 30.4$$

حال مانند زمانی که فقط یک کرت از دست رفته داریم، براساس فرمول ییتز کرت ب را تخمین می زنیم:

اولین چرخه

اولین تخمین کرت ب

$$= \frac{tV + rR - G}{(r-1)(t-1)} = \frac{4(126.5) + 5(96.8) - (600.7 + 30.4)}{(5-1)(4-1)} = 29.9$$

حالا تخمین کرت ب (۲۹/۹) را در جدول داده ها وارد کرده و به کمک فرمول ییتز، کرت الف را تخمین می زنیم:

$$= \frac{tV + rR - G}{(r-1)(t-1)} = \frac{4(99.9) + 5(107.3) - (600.7 + 29.9)}{(5-1)(4-1)} = 25.4$$

دومین چرخه

حالا تخمین کرت الف (۲۵/۴) را در جدول داده ها وارد کرده و به کمک فرمول ییتز، کرت ب را تخمین می زنیم:

$$= \frac{tV + rR - G}{(r-1)(t-1)} = \frac{4(126.5) + 5(96.8) - (600.7 + 25.4)}{(5-1)(4-1)} = 30.3$$

حالا تخمین کرت ب (۳۰/۳) را در جدول داده ها وارد کرده و به کمک فرمول ییتز، کرت الف را تخمین می زنیم:

$$= \frac{tV + rR - G}{(r-1)(t-1)} = \frac{4(99.9) + 5(107.3) - (600.7 + 30.3)}{(5-1)(4-1)} = 25.4$$

سومین چرخه

حالا تخمین کرت الف (۲۵/۴) را در جدول داده ها وارد کرده و به کمک فرمول ییتز، کرت ب را تخمین می زنیم:

$$= \frac{tV + rR - G}{(r-1)(t-1)} = \frac{4(126.5) + 5(96.8) - (600.7 + 25.4)}{(5-1)(4-1)} = 30.3$$

حالا تخمین کرت ب (۳۰/۳) را در جدول داده ها وارد کرده و به کمک فرمول ییتز، کرت الف را تخمین می زنیم:

$$= \frac{tV + rR - G}{(r-1)(t-1)} = \frac{4(99.9) + 5(107.3) - (600.7 + 30.3)}{(5-1)(4-1)} = 25.4$$

همان طور که می بینید، تخمین های دومین و سومین چرخه با هم برابر است. پس نیازی به ادامه ی چرخه ها نیست.

نکته: به ازای دو کرت گم شده ی الف و ب، در جدول تجزیه واریانس، دو درجه از درجه های آزادی خطا و کل کسر می شود.

نکته: اگر بیش از دو کرت گم شده داشته باشیم، همه ی آنها را به جز یکی، به طور مقدماتی تخمین زده و آن یکی را با فرمول ییتز محاسبه می کنیم.

نکته: پاسخ های هر مرحله از مراحل تخمین باید به تعداد اعشار داده های اصلی آزمایش گرد شود. برای نمونه برای جدول قبلی، هر تخمینی باید دارای یک عدد بعد از اعشار باشد.